SOCIETÀ REALE DI NAPOLI

RENDICONTO

DELL'ACCADEMIA

DELLE

SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

SERIE IV. — VOL. IX. — (Anno LXXVIII)

29 ottobre 1938 — 28 ottobre 1939 - XVII

NAPOLI
STABILIMENTO TIPOGRAFICO G. GENOVESE
Pallonetto S. Chiara, 22 - Telef. 24.566
1939-XVII

Digitized by the Internet Archive
in 2024

https://archive.org/details/accademia-delle-scienze-fisiche-e-matematiche-rendiconto_1938-1939_9

RELAZIONE

SUI LAVORI COMPIUTI DALLA R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE DELLA SOCIETÀ REALE DI NAPOLI

DURANTE L'ANNO 1937-38 (XVI)

letta nell' adunanza del dì 2 febbraio 1939 (XVII)

dal socio segretario **Geremia D' Erasmo**

L' anno accademico che si è chiuso il 28 ottobre scorso, e sull'attività del quale adempio oggi il dovere di riferirvi brevemente, ha visto, come sempre, il nostro Sodalizio rivolto, con l' antico amore e con l' alacrità consueta, al compito al quale attende da più di un secolo di gloriosa vita: il progresso delle scienze matematiche e naturali nel mezzogiorno d'Italia.

Abbiamo pubblicato, in conformità della decisione presa dall'Accademia, un volume unico del Rendiconto, contenente — oltre a tre commemorazioni di soci, ai consueti processi verbali delle tornate e all' elenco delle opere ed opuscoli ricevuti in dono dagli autori o dagli editori — la relazione annua del Segretario, i sunti delle memorie, i rapporti sul conferimento dei premi e sedici note di soci e di estranei, con numerose figure intercalate; ed abbiamo proseguito, mercè la generosa elargizione annua della benemerita Direzione generale del Banco di Napoli, la stampa del volume degli Atti, accogliendovi tre nuove memorie.

Iniziando la mia breve rassegna di tali contributi scientifici dalle ricerche astronomiche, dirò che, analogamente a quanto pubblicò negli anni precedenti, il socio CARNERA ha continuato a trattare de *Le variazioni di latitudine*, esponendo in due distinte note i risultati delle osservazioni compiute durante il 1937 dalle cinque stazioni internazionali dell' emisfero boreale e dalle due stazioni dell'emisfero australe, dai quali ha potuto ricavare nuovi e più esatti valori per la polodia.

Ricordando ora i principali contributi relativi alle matematiche pure, è anzitutto da segnalare una nota del socio GALLUCCI, su *L' involuzione unita*, in cui egli presenta una dimostrazione dell'esistenza dell'involuzione unita di una proiettività ellittica, dipendente dalla effettiva costruzione e dalle proprietà dei gruppi armonici di punti su di una conica, e studia la configurazione armonica generata da due gruppi siffatti. In un lavoro *Sulle equazioni algebriche a coefficienti reali* il prof. Tullio VIOLA ha dimostrato

una condizione necessaria e sufficiente affinchè un' equazione algebrica a coefficienti reali si possa spezzare nel prodotto di altre due, delle quali una risulti del tipo di Hurwitz, e l' altra contenga soltanto potenze pari o potenze dispari della variabile. *Sull' analiticità delle funzioni rappresentate mediante serie trigonometriche* il dott. Lamberto Cesari ha completato alcune sue precedenti ricerche, nelle quali erano date condizioni sufficienti per l' esistenza e la continuità delle derivate d' ordine p nell' intervallo aperto $(0, 2\pi)$ delle funzioni rappresentate mediante serie trigonometriche, ed ha dimostrato le condizioni sufficienti per la continuità delle derivate di tutti gli ordini e per l' analiticità di dette condizioni considerate nello stesso intervallo. In un altro campo di indagini, che riguardano problemi di probabilità nella interpretazione di fatti e di leggi economiche, il prof. G. Palomba ha esposto schematicamente i principii che governano *l' equilibrio stazionario in economia*, accennando alla conseguente concezione di alcune grandezze fondamentali (prezzi, volume produttivo, massa monetaria) che intervengono nel fenomeno del moto economico.

Nel campo delle ricerche chimiche sono da segnalare varie note, dovute al prof. Ugo Beretta e al prof. Giuseppe Cotroneo. In uno studio *sull' elettrodo ad antimonio* il Beretta discute il comportamento di questo elettrodo in presenza di soluzioni zuccherine e precisa le condizioni di lavoro per un controllo continuativo su liquidi fluenti; mentre in una nota su *La decomposizione della nitrammide* riferisce sopra le misure della velocità con cui questo composto si decompone in soluzioni acquose di acido cloridrico in presenza di concentrazioni crescenti di cloruri di sodio e di potassio a varie temperature. Il prof. Cotroneo fa oggetto delle sue ricerche, in due note, la misura dei *calori di adsorbimento*, discutendo il significato che hanno le variazioni dei valori osservati in funzione della percentuale adsorbita, e mettendo in evidenza l' importanza che potrebbero avere misure rapide di tali grandezze per lo studio delle proprietà dei carboni attivi. Descritta la tecnica sperimentale adoperata e riportati i valori ottenuti in alcune serie di misure con acqua, alcool metilico, benzene e tetracloruro di carbonio, ha studiato, in una seconda nota, il comportamento di alcune sostanze vegetali più o meno lignificate (gusci di mandorle, di nocciuole, di noci di cocco ecc.), che possono servire come materie prime per la fabbricazione di carboni attivi, mettendo in rilievo l' influenza che hanno, nei fenomeni di attivazione, la materia prima iniziale, la temperatura e la durata dell' attivazione, nonchè la portata della corrente attivante.

A problemi chimico-tecnologici strettamente connessi con problemi di carattere agrario è dedicata un' altra nota dello stesso ing. Cotroneo (*Ricerche sulla canapa*), particolarmente interessante in questo periodo di rinnovato fervore di studi per l' incremento della utilizzazione della canapa. Si mette, in essa, in evidenza il ciclo vegetativo della canapa nei suoi diversi stadi, tanto per il reddito quanto per la composizione dei prodotti, e si cerca

di assodare l'influenza, sul reddito, di alcuni fattori culturali, quali la densità di semina, la fittezza di semina e la concimazione minerale diretta.

A particolari indagini di chimica cristallografica si riferisce la nota del dott. Luigi Longo, diretta a dimostrare, mediante una serie di ricerche sul cloruro ammonico formatosi al Vesuvio durante l'eruzione del 1906, l'*Influenza di alcune sostanze sulla cristallizzazione del clorammonio di formazione vulcanica.* È risultato dalle sue osservazioni, che alcuni componenti secondari influiscono effettivamente sull'accrescimento dei cristalli di tale sostanza, modificandone la velocità in qualche direzione, col risultato di favorire più o meno la formazione del cubo e dell'ottaedro.

Passando ora alle ricerche biologiche, è da ricordare un lavoro del prof. Marco Fedele sulla *Differenziazione e significato del «cordone cellulare dorsale» e genesi degli elementi nervosi viscerali negli Ascidiacei*, nel quale viene descritto un nuovo apparato nervoso paracordonale degli Ascidiacei, la cui scoperta modifica notevolmente le concezioni che si avevano del sistema nervoso centrale di questi animali. L'apparato nervoso paracordonale è generato dagli elementi neuroblastici del cordone cellulare dorsale, organo che a sua volta deriva dalla parte posteriore del tubo neurale primitivo della larva delle Ascidie: sicchè, come il rigonfiamento anteriore del tubo neurale primitivo dà origine, per proliferazione di parte della sua parete, al ganglio cerebroide, così la parte posteriore non rigonfia di esso, rappresentata nell'adulto dal cordone cellulare dorsale, dà origine all'apparato nervoso paracordonale, racchiudente in piccola parte vie da ritenersi somatiche, ed in parte predominante centri ganglionari viscerali. Si dimostrano in tal modo, nella evoluzione del tubo neurale primitivo degli Ascidiacei, ulteriori analogie con quella degli altri Cordati.

Osservazioni di morfologia e di embriologia vegetale vengono riportate nella nota preventiva del prof. Gaetano Rodio sulla *Umbellularia californica* Nutt. Descritti i fiori di questa bella Lauracea e seguitone il ritmo di fioritura e di fruttificazione nel clima di Napoli, si passano in rassegna le varie fasi di sviluppo, rilevando specialmente gli aspetti e l'evoluzione dell'endosperma e il notevole ritardo nel costituirsi dell'embrione.

Altre due note preventive, dovute alla prof. Maria Fiore, riguardano avanzi fossili da lei rinvenuti nel Cretaceo del Gargano, che vengono rispettivamente interpretati quali resti di rizoma e di stipite di probabili felci e come megasporangio a camera pollinica.

Pure nel campo paleontologico l'Accademia ha accolto due memorie, che sono state inserite nel volume degli Atti. Una di esse, dovuta al socio D'Erasmo, è destinata alla illustrazione di una raccolta di *Ittioliti cretacei del Brasile* provenienti dai dintorni di Crato, nello Stato di Ceará. L'ittiofauna, che comprende rappresentanti delle fam. *Aspidorhynchidae, Semionotidae, Leptolepidae, Elopidae* e *Ichthyodectidae*, racchiude una specie

nuova per la scienza, indica un giacimento marino formatosi a distanza non molto grande dall' antica linea di riva, e, pur risultando per la massima parte da specie esclusive dei depositi brasiliani, offre lo stesso grado di evoluzione e spiccate affinità con quelle riscontrate nei sedimenti mediocretacei, specialmente cenomaniani, dell'Europa, dell'America settentrionale e dell' Australia. L' altra memoria, dovuta alla collaborazione dei soci De Lorenzo e D' Erasmo, illustra alcuni *Avanzi di elefante e di ippopotamo della valle del Sele*, recentemente scavati a circa 5 chilometri dalla foce del fiume. Tali resti, che vengono confrontati con gli analoghi avanzi riscontrati nei depositi pleistocenici di numerose altre località dell' Italia meridionale ed illustrati precedentemente dagli stessi autori in lavori ugualmente accolti nei nostri Atti accademici, spettano, per i loro caratteri, alle specie più diffuse, al principio del Quaternario, lungo i principali corsi di acqua e intorno ai maggiori laghi del nostro Appennino: *Elephas antiquus* Falc. e *Hippopotamus amphibius* Linn.

Come negli anni precedenti, l' Accademia ha seguìto con particolare interesse le questioni scientifiche più importanti e non ha mancato di partecipare a convegni o celebrazioni di notevole significato: così ha, fra l'altro, aderito, per quanto era di sua competenza, al tema proposto dalla R. Accademia d' Italia per il Convegno Volta del 1938 su *L' Africa*; ha espresso uno speciale voto riguardante l' attuale insufficienza di mezzi strumentali dell' Osservatorio Astronomico di Capodimonte; ha partecipato, mediante propri delegati, alla riunione della Società Geodetica Italiana, al X Congresso Internazionale di Chimica, e al 50° anniversario della fondazione della Società Botanica Italiana.

Vennero giudicati due concorsi a premio. Per quello al premio Sementini relativo al biennio 1935-36 l' Accademia, pienamente accogliendo le proposte della Commissione Bakunin, Giordani e Quercigh, divise la somma disponibile di lire mille in due premi di lire cinquecento ciascuno, che assegnò ai due concorrenti dottori Ugo Beretta e Giuseppe Cotroneo, per le memorie manoscritte rispettivamente presentate: *L' elettrodo ad antimonio per la misura del pH*, e *Lignina e cellulosa nel fenomeno di attivazione dei carboni*. Ugualmente divise a metà, su proposta della medesima Commissione, la somma disponibile per il quarto concorso al premio « Agostino Oglialoro-Todaro » destinato ai migliori laureati in Chimica pura nell' Università di Napoli, assegnando L. 500 a ciascuno dei due candidati: dott. Calvanese Anna e Valoti Carla. Furono poi fissate in modo organico e preciso le norme che dovranno, d' ora in poi, regolare il bando e l' assegnazione dei vari premi amministrati dall' Accademia, dei quali il vostro Segretario formulò uno schema di Regolamento, che, debitamente approvato, fu trasmesso alla presidenza della Società Reale di Napoli per gli ulteriori atti prescritti dallo Statuto e dal Regolamento.

L'anno testè decorso fu particolarmente doloroso per il nostro Sodalizio, che vide scomparire ben tre dei suoi più cari ed illustri soci corrispondenti nazionali: Giovanni De Berardinis, appartenente alla Sezione di Scienze matematiche dal 25 giugno 1921; Orazio Rebuffat, accolto nella Sezione di Scienze naturali dal 2 novembre 1912; e Nicola Parravano, eletto in quest'ultima sezione il 21 giugno 1924 e già proposto a S. E. il Ministro dell'Educazione Nazionale per la nomina a socio ordinario con voto del dì 11 giugno 1938.

Di Giovanni De Berardinis, professore emerito di Geodesia nella nostra Università, spentosi il 14 novembre 1937 nella tarda età di 91 anni, il Rendiconto accolse una commossa commemorazione, dovuta al consocio Marcolongo, che ne rievocò le principali vicende della carriera e ne riassunse la lunga attività didattica e scientifica, rivolta tanto al progresso degli studi di geodesia teorica e di astronomia sferica, quanto alla pratica applicazione dei più delicati e precisi calcoli.

Analogamente venne inserita, nel medesimo periodico, un'affettuosa rievocazione, dovuta alla socia Bakunin, della nobile figura di Orazio Rebuffat, spentosi il 5 aprile 1938, che ha legato il suo nome alle difficili ricerche analitiche sulle ceramiche, sui refrattarii, sulle pozzolane e su numerosi prodotti organici, ed ha sommamente contribuito, mediante un quarantennio di insegnamento nella Facoltà di Ingegneria di Napoli, alla coscienziosa e severa educazione dei giovani allievi.

E non mancherà infine, nel nuovo Rendiconto dell'anno XVII, per merito di S. E. Giordani, un duraturo e degno ricordo dell'altro consocio Nicola Parravano, accademico d'Italia, mancato immaturamente, nel pieno vigore delle sue gagliarde e multiformi energie, il 10 agosto 1938. Giunto, appena trentenne, alla cattedra di Chimica applicata a Padova nel 1913, chiamato poi a coprire a Firenze la prima cattedra di Chimica fisica istituita in Italia, e passato dal 1919 a Roma, ove ha tenuto per un venticinquennio la direzione dell'Istituto che fu di Stanislao Cannizzaro e di Emanuele Paternò, Nicola Parravano fu un magnifico realizzatore nei più svariati settori della chimica, un vero precursore dello sviluppo scientifico-tecnico nell'industria italiana, un prezioso consigliere ed animatore di una enorme schiera di giovani collaboratori, un organizzatore formidabile di memorabili congressi e di altissimi Enti scientifici e tecnici, un appassionato maestro di chiarezza e di precisione, e sopratutto un fiero valorizzatore delle realizzazioni compiute dalla chimica italiana in regime fascista.

Alla venerata memoria di questi eminenti colleghi, che furono scienziati valorosi, maestri impareggiabili, cittadini esemplari, e come tali accrebbero lustro e decoro all'Accademia nostra, vada oggi il mesto omaggio del nostro caro ricordo e sempre vivo rimpianto.

Ma, se breve è la vita umana, la fiaccola del sapere si trasmette e non si spegne. Ad altri colleghi abbiamo recentemente affidato il còmpito

di mantenere alta la gloriosa e secolare tradizione di questo Sodalizio. La massima parte dei nuovi soci ordinari, tratta dalla schiera dei corrispondenti nazionali, comprende nomi che già ci sono cari per la lunga consuetudine alle tornate accademiche o per il cospicuo contributo di ricerche da essi offerto per la stampa nei nostri rendiconti ed atti. Nuovi colleghi sono invece il prof. Malquori Giovanni, ordinario di Chimica farmceutica e preside della Facoltà di farmacia del nostro Ateneo, e il prof. Senatore Federico Millosevich, Segretario del Senato del Regno, presidente della R. Accademia Nazionale dei Lincei ed ordinario di Petrografia nella R. Università di Roma, nominati soci ordinari nella sezione di scienze naturali; ed i seguenti soci corrispondenti nazionali della medesima sezione: Checchia Rispoli Giuseppe, ordinario di geologia nell' Università di Roma; De Dominicis Alberto, direttore dell' Istituto di Chimica agraria e dell' annessa Stazione Chimico-agraria Sperimentale di Portici; Focaccia Basilio, ordinario di misure elettriche nell' Università di Roma; Ippolito Girolamo, ordinario di costruzioni idrauliche nell' Università di Napoli; Gleijeses Mario, ordinario di Architettura navale nell' Università di Napoli; e Zirpolo Giuseppe, incaricato di Parassitologia e Zoologia generale nello stesso Ateneo. Vennero, inoltre, eletti soci corrispondenti stranieri nella sezione delle scienze matematiche i professori: Blaschke Wilhelm, insigne divulgatore della geometria differenziale e fondatore di un attivissimo Seminario matematico ad Amburgo; Jouguet Émile, professore alla Scuola Politecnica di Parigi; Sierpinski Waclaw, fondatore della fiorente Scuola matematica di Varsavia; e Whittaker Edmund Taylor, professore di matematica nell' Università di Edimburgo.

Colmati, così, in gran parte, i larghi vuoti che l' inesorabilità della morte aveva prodotti nelle nostre file, mi sia lecito esprimere l' augurio, che con la immissione delle nuove e fresche energie l' Accademia riesca sempre meglio a raggiungere l' alto suo fine in questo centro di studi, tramandando ai giovani, con rinnovellata lena, il nobile retaggio delle passate generazioni e di quella che ormai volge al tramonto.

Ulteriori complementi allo studio statico dei cilindri elastici soggetti a flessione composta.

Nota del socio ordinario **Carlo Luigi Ricci**

(Adunanza del dì 3 novembre 1938 - XVII)

Sunto. — In prosecuzione degli studi svolti nella precedente nota comparsa in questo Rendiconto « *Contributo allo studio statico dei cilindri elastici soggetti a torsione, taglio e flessione* ecc.... » (serie 4.ª, vol. VI, 1937, XV), l'autore espone alcune trasformazioni di integrali di area che compaiono in detta nota, ottenendo alcune notevoli identità e verifiche. Inoltre espone in via geometrica sintetica le proprietà di una speciale omografia interessante nello studio della generalizzazione del concetto di *centro di taglio*, già ricavata con altro metodo analitico nella precedente nota sopra citata.

Il presente lavoro ha per oggetto due argomenti di complemento e precisazione agli studi svolti in un altro mio precedente lavoro dal titolo « *Contributo allo studio statico dei cilindri elastici soggetti a torsione, taglio e flessione ecc....* » (Rendiconto della R. Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche della Società Reale di Napoli, serie 4.ª, vol. VI, 1937, XV).

Ciascun argomento vien trattato ordinatamente in uno dei due paragrafi seguenti, facendo, per quanto occorre, completo riferimento al suddetto lavoro, di cui il presente è prosecuzione e completamento. Le lettere indicative dei paragrafi, ed i numeri delle formule del lavoro stesso, nelle citatazioni che qui faremo, verranno contradistinti con l'indice c.

I. — *Ulteriore verifica di una particolare identità che si presenta nel calcolo statico della torsione.*

Nel paragrafo A_c del precedente lavoro su citato si dànno, nelle formule $(5)_c$ e $(9)_c$ due formalmente diverse espressioni del noto *fattore di torsione* q, le quali devono necessariamente essere sostanzialmente identiche. Tale identità fu già verificata o dimostrata nel precedente lavoro citato, nell'ultima parte del paragrafo C_c (pag. 20 dell'estratto). Ora vogliamo esporre per la stessa identità un'altra dimostrazione (o verifica), la quale, in un certo senso, è forse più diretta ed immediata, e d'altra parte ci fornisce l'occasione di riscontrare un'interessante espressione del momento d'inerzia polare I_p di una figura piana, sotto forma di integrale di linea esteso al contorno.

Dobbiamo dunque dimostrare che sono identicamente uguali i denominatori delle due predette espressioni di q, le quali hanno lo stesso numeratore.

Partiamo dal denominatore dell' espressione $(5)_c$, trasformato secondo le note relazioni tra le derivate parziali delle due funzioni armoniche coniugate Φ_1 e Ψ_1 [v. sùbito dopo le $(2\,\text{bis})_c$].

Indicandolo con D, avremo:

$$D = I_p + \int_A \left(x \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + y \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \right) dA$$

Applichiamo a questo integrale la trasformazione espressa dalle $(19)_c$ e $(20)_c$, a pag. 19 dell'estratto del precedente lavoro; «*Contributo*... ecc.... » così troviamo:

$$D = I_p - 2 \int_A \Phi_1 \, dA - \int_s \Phi_1 \left[x \cos(nx) + y \cos(ny) \right] ds \qquad (1)$$

Ricordiamo quanto è detto a pag. 7 dell' estratto del citato lavoro: ne deduciamo che conforme alla $(7)_c$, e dovendo sul contorno essere $F = 0$, ivi deve anche essere:

$$\Phi_1 = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

Sostituiamo nella (1) ed otteniamo:

$$D = I_p - 2 \int_A \Phi_1 \, dA + \frac{1}{2} \int_s (x^2 + y^2) \left[x \cos(nx) + y \cos(ny) \right] ds \qquad (2)$$

Il secondo integrale a secondo membro si può trasformare in integrale di superficie mediante la ben nota *formula di* Gauss a due dimensioni ed abbiamo:

$$-\frac{1}{4} \int_s (x^2 + y^2) \left[x \cos(nx) + y \cos(ny) \right] ds =$$

$$= \frac{1}{4} \int_A \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(x^3 + x y^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(x^2 y + y^3 \right) \right] dA =$$

$$= \frac{1}{4} \int_A \left[(3x^2 + y^2) + (x^2 + 3y^2) \right] dA =$$

$$= \int_A (x^2 + y^2) \, dA = I_p.$$

Si ha dunque I_p sotto la forma:

$$I_p = -\frac{1}{4}\int_s (x^2 + y^2)\,[x\cos(nx) + y\cos(ny)]\,ds. \qquad (3)$$

Con ciò, dalla (2) si deduce:

$$D = -I_p - 2\int_A \Phi_1\,dA$$

quindi, secondo la $(7)_c$ già citata e conforme a quanto è esposto a pag. 10 dell'estratto del lavoro precedente, si ha:

$$D = -2\int_A F dA = 2V$$

e si verifica che D coincide identicamente con il denominatore della $(9)_c$, [pag. 10 dell'estratto già citato].

Abbiamo dunque ridimostrato l'identità sopra descritta, riscontrando occasionalmente l'espressione (3) di I_p.

II. — *Nel calcolo statico della flessione composta generica o completa: studio sintetico dell'omografia affine intercedente tra i punti R_o, centri di fasci di rette r_o, di rot $\bar{\tau}_z = 0$, ed i corrispondenti centri di taglio C_t, già definiti nel precedente lavoro citato.*

Nei paragrafi C_c, D_c ed E_c del detto lavoro « *Contributo ecc....* » si sono studiate le sollecitazioni denominate di flessione composta generica o completa, (flessione, taglio e torsione) definite dalle $(12)_c$ per ciò che riguarda gli spostamenti e dalle $(13)_c$ per ciò che si riferisce alle tensioni, e si è constatato che per ogni « tipo » di tale sollecitazione si ha una retta r_o (normale all'asse neutro x), sulla quale si ha rot $\bar{\tau}_z = 0$, conforme alla seconda delle $(16)_c$, mentre la posizione della risultante delle corrispondenti azioni tangenziali (taglio $\bar{T}$) viene definita dalla $(26)_c$, che ne fornisce la distanza d_1 dal centro di torsione O_1 (relativo al baricentro O: v. paragrafo A_c), misurata parallelamente all'asse neutro.

Successivamente si constatò che tutti i « tipi » di sollecitazione, per i quali le corrispondenti rette r_o passano per un dato punto R_o, hanno i rispettivi tagli risultanti $\bar{T}$, i quali passano pure tutti per uno stesso punto C_t, che si è denominato *centro di taglio* relativo al dato punto R_o, generalizzando così il concetto di *centro di taglio*, che precedentemente era stato definito solo per le sollecitazioni di flessione composta pura (senza torsione), per le quali il punto R_o coincide col baricentro O.

Si è poi dimostrato che la corrispondenza tra i punti R_o ed i relativi centri di taglio C_t è una omografia affine, rappresentata analiticamente dalle $(37)_o$.

Così l'esistenza del centro di taglio C_t relativo ad un dato punto R_o, come le modalità della detta omografia affine furono dimostrate mediante considerazioni di geometria analitica, un po' lunghe, le quali però consentirono di esprimere, con la (31), l'equazione del diagramma polare del *braccio di leva* d_1 per i « tipi » di sollecitazioni $(13)_c$, di cui le rette r_o passano per un dato punto R_o.

Ora vogliamo qui esporre per l'esistenza del centro di taglio C_t relativo ad un dato punto R_o, e per le modalità della detta omografia affine $[R_o, C_t]$, una dimostrazione geometrica sintetica, più diretta e più breve di quella esposta nel precedente lavoro « *Contributo* ... ecc.... già citato.

A tal fine consideriamo due diverse sollecitazioni $(13)_c$, corrispondenti a due assi neutri x_1 ed x_2, ed a rette di rot $\overline{\tau}_z = 0$ rispettivamente r_{o1} ed r_{o2}; siano poi t_1 e t_2 le rette d'azione dei rispettivi tagli $\overline{T}_1$ e $\overline{T}_2$, e siano $\overline{\tau}_{z1}$ e $\overline{\tau}_{z2}$ le tensioni tangenziali rispettive in un punto generico.

Si consideri poi una sollecitazione, la quale sia *combinazione lineare* delle due ora definite, secondo due parametri arbitrariamente variabili λ_1 e λ_2, sicchè il taglio $\overline{T}$ ad essa pertinente sia:

$$\overline{T} = \lambda_1 \overline{T}_1 + \lambda_2 \overline{T}_2$$

Questo taglio ha per retta d'azione una retta t passante per il punto C_t comune alle due rette t_1 e t_2 sopra definite: al variare del rapporto λ_1/λ_2 tra $-\infty$ e $+\infty$, la retta t descrive il fascio di centro C_t.

La retta r_o corrispondente a t è quella su cui è nulla la *rotazione* della $\overline{\tau}_z$ dovuta al taglio $\overline{T}$; su essa è dunque: rot $\overline{\tau}_z = 0$.

Ma d'altra parte evidentemente si ha:

$$\text{rot } \tau_z = \lambda_1 \text{ rot } \overline{\tau}_{z1} + \lambda_2 \text{ rot } \overline{\tau}_{z2}$$

e quindi, per qualunque valore di λ_1 λ_2 la rot $\overline{\tau}_z$ si annulla certo nel punto R_o comune alle rette r_{o1} ed r_{o2} sopra ricordate. Perciò la retta r_o passa per il punto R_o ed al variare di λ_1/λ_2 descrive il fascio di centro R_o.

A questo fascio di rette r_o con il centro in R_o corrisponde dunque il fascio delle rette t con il centro in C_t: i due fasci sono proiettivi in quanto due raggi corrispondenti sono in essi definiti dalla stessa *coordinata proiettiva* λ_1/λ_2.

Il punto C_t si può dunque denominare il *centro di taglio relativo al punto* R_o, in quanto per esso passano le rette t d'azione dei tagli $\overline{T}$ corrispondenti ai « tipi » di sollecitazione, le cui rette r_o (di rot $\overline{\tau}_z = 0$) passano per il punto R_o.

Per definire completamente la natura della corrispondenza tra i punti R_o e C_t, basta osservare che se R_o descrive una retta r_o, il corrispondente C_t descrive la retta t corrispondente ad r_o. La corrispondenza è dunque lineare, e pertanto è un' *omografia.*

La direzione di t, rispetto all'ellisse centrale d'inerzia della sezione, è coniugata della direzione dell' asse neutro x, che è normale ad r_o.

Quindi se R_o è all'infinito, anche C_t è all'infinito: l'*omografia* sopra descritta $[R_o, C_t]$ è dunque *affine*; in essa la retta all'infinito è *retta unita*, pur non essendo luogo di punti uniti. Ciò ha riscontro nel noto fatto meccanico: quando r_o è all'infinito rot $\overline{\tau}_z$ è costante, e siamo nel caso della pura torsione, in cui la risultante delle azioni tangenziali $\overline{\tau}_z dA$ si riduce ad una coppia torcente, che si può notoriamente considerare come una forza infinitamente piccola agente secondo la retta all'infinito del piano. Nella proiettività già individuata sulla retta all'infinito sono evidentemente uniti i punti all'infinito degli assi principali d'inerzia della sezione.

Vediamo ora quali elementi geometrici occorre e basta determinare per individuare geometricamente la detta omografia affine $[R_o, C_t]$.

Dalla geometria proiettiva è ben noto che per individuare un' omografia tra due piani (eventualmente in particolare sovrapposti, come nel caso nostro), è necessario e sufficiente conoscere le proiettività ad essa subordinate p. es. su due coppie di rette in essa corrispondenti a, a' e b, b', con la condizione ovvia che al punto ab corrisponda, nell'omografia, e quindi nelle dette proiettività, il punto $a'b'$.

Orbene, nella nostra omografia $[R_o, C_t]$ essendo già nota, come sopra s'è visto, la proiettività subordinata sulla retta unita all'infinito, occorre e basta individuare la proiettività tra le punteggiate omologhe su una coppia di rette corrispondenti r_0, t. Per ottenere ciò occorre anzitutto applicare la $(26)_c$ per ottenere di una data retta r_0 la corrispondente retta t; e poichè su queste due, come già s'è visto, sono corrispondenti i punti all'infinito, occorre e basta determinare su t due punti C_{t1} e C_{t2} corrispondenti di due punti propri R_{01} ed R_{02} distinti, arbitrariamente scelti su r_0.

Ciò si può fare assegnando due rette r_{01} ed r_{02}, per comodità parallele tra loro, ma in direzione distinta da quella della r_0, e poi applicando due volte la $(26)_c$ per trovare le due corrispondenti rette t_1 e t_2; così si avranno i due punti $R_{01} \equiv r_0, r_{01}$ ed $R_{02} \equiv r_0, r_{02}$ ed i loro rispettivamente omologhi $C_{t1} \equiv t, t_1$ e $C_{t2} \equiv t, t_2$ e l'omografia affine $[R_0, C_t]$ in tal modo resta perfettamente individuata.

È opportuno notare che la detta omografia si può anche più semplicemente e più direttamente individuare quale corrispondenza, nei due piani rigati sovrapposti, tra le rette r_0 e le omologhe t. Da quanto già si è esposto nel precedente lavoro « *Contributo... ecc. ..* » risulta che ad un qualunque fascio improprio di rette r_0 corrisponde un fascio pure improprio delle omo-

loghe rette t: la corrispondenza tra i due fasci è proiettiva poichè individuata dalla $(26)_c$, che è lineare nei parametri di posizione delle rette corrispondenti; inoltre per le ragioni illustrate la retta all'infinito è unita: ne consegue che i due fasci considerati sono per di più *prospettivi*, cioè i raggi corrispondenti s'incontrano in punti di una stessa retta.

Per individuare geometricamente la corrispondenza proiettiva tra i due piani rigati basta dunque determinare la proiettività tra due distinte coppie di fasci improprî omologhi di centri A_∞, A'_∞ e B_∞, B'_∞, [e ciò si fa applicando la $(26)_c$ per due distinti assi neutri x]; in tali fasci alla retta impropria $A_\infty B_\infty$ corrisponde (con coincidenza) la stessa retta impropria $A'_\infty B'_\infty$: quindi, per quanto è noto dalla geometria proiettiva (proprietà duale di quella già citata sopra per la corrispondenza tra i piani punteggiati), l'omografia r_0, t è completamente individuata. Essa poi stabilisce in conseguenza tra i due piani punteggiati l'omografia R_0, C_t: così si ritrova per altra via anche l'esistenza del centro di taglio C_t relativo al punto R_0 come sopra.

In questa stessa omografia, oltre alla retta unita all'infinito, si hanno altre due rette unite $r_{ou\xi}$ $r_{ou\eta}$ che, per quanto s'è visto sopra, sono parallele rispettivamente ai due assi ξ ed η principali d'inerzia della sezione (ai quali appartengono i punti $U_{\xi\infty}$ ed $U_{\eta\infty}$ uniti sulla retta all'infinito).

Tali rette unite, oltre che con le ben note operazioni geometriche proiettive, si possono anche determinare con applicazione della $(26)_c$ successivamente a due assi neutri x, coincidenti rispettivamente con gli assi η e ξ, e ponendo in essa:

$$d_1 = x_1 - \delta$$

essendo x_1 l'ascissa (valutata secondo il rispettivo asse neutro x) del *centro di torsione* O_1, relativo al baricentro O [v. paragrafo A_c, pag. 5 e 6 dell'estratto].

Si troverà così in ognuno dei due casi un'equazione lineare in δ, che ci determinerà rispettivamente e successivamente la posizione di ciascuna delle due rette $r_{ou\xi}$ e $r_{ou\eta}$.

Il punto U_c, comune a queste due rette è il terzo punto unito dell'omografia $[R_o, R_t]$, dopo gli altri due improprî già definiti più sopra.

Confido di avere, con questo breve lavoro, compiuto un modesto, ma utile e sotto certi riguardi definitivo completamento degli argomenti svolti nel precedente lavoro « *Contributo* ... ecc.... », ed intesi ad approfondire ed a semplificare lo studio statico di tutta una classe o categoria di sollecitazioni, notoriamente importantissima nella scienza delle costruzioni.

Napoli — R. Università — Facoltà d'Ingegneria, Istituto di Scienza delle Costruzioni — 3 novembre 1938 - XVII.

Sulle equazioni algebriche a coefficienti reali, le cui radici hanno parti reali esterne o non interne a un determinato intervallo [1]).

Nota del prof. **Tullio Viola**, *presentata dal socio* **M. Picone**

(Adunanza del dì 3 novembre 1938 - XVII)

Sunto. — Si dimostra che condizioni necessarie e sufficienti affinchè le radici di un'equazione algebrica a coefficienti reali, abbiano tutte parti reali esterne (non interne) a un determinato intervallo, sono che certi polinomi siano definiti (semidefiniti) positivi sull'intero asse reale.

In un lavoro precedente ho studiato le equazioni algebriche a coefficienti reali nell'ordine d'idee di un classico teorema di Hurwitz. Dietro consiglio del prof. M. Picone, riprendo ora lo studio di tali equazioni, proponendomi la ricerca di condizioni affinchè le radici abbiano tutte parte reale esterna (oppure non interna) ad uno assegnato intervallo dell'asse reale. La questione ha particolare interesse in problemi tecnici, ed anche all'Istituto per le Applicazioni del Calcolo è stata più volte incontrata.

Lo scopo di questa breve nota è quello di mostrare come il problema possa ricondursi alle condizioni affinchè un certo gruppo di polinomi siano definiti (semidefiniti) sull'intero asse reale. Esso dunque, per questa via, può collegarsi a ricerche assai complesse, che risalgono all'Hurwitz e che sono state approfondite, negli ultimi anni, soprattutto dai professori Cherubino e Sansone [2]). Sui detti polinomi farò, da ultimo, alcune considerazioni, che si ricollegano al teor. di Sturm e che ritengo utili per le applicazioni.

1. Siano

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

---

[1]) Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

[2]) Cfr. principalmente: G. Sansone, *Un problema sui polinomi definiti o semidefiniti.* (Atti R. Istituto Veneto, vol. XC, 1930-31, p. 206). — S. Cherubino, *Sui polinomi definiti o semidefiniti.* (Rend. R. Acc. Sc. Fisiche e Matematiche di Napoli, (4), 35, 1929, p. 133). Questa ricerca del prof. Cherubino riassume anche altri studi dell'A. sullo stesso argomento, mentre nei due loc. cit. si troverà ampia bibliografia di ricerche precedenti di A. Hurwitz, Y. Okada, M. Bôcher, C. Hermite, F. Hausdorff e altri. — T. Viola, *Sulle equazioni algebriche a coefficienti reali.* (Rend. R. Acc. Sc. Fisiche e Matematiche di Napoli, (4), 8, 1937-38, p. 76).

ma qualunque equazione algebrica di grado n a coefficienti reali, x_0 un numero reale qualunque, δ un numero reale positivo qualunque. Vogliamo ricercare le condizioni affinchè le radici dell'equazione abbiano tutte parte reale esterna, oppure non interna, all'intervallo $x_0 - \frac{\delta}{2} \quad x_0 + \frac{\delta}{2}$.

Mediante la traslazione

$$z = x_0 + u.$$

che porta l'origine nel punto x_0 dell'asse reale, l'equazione diventa algebrica in u:

$$f(x_0 + u) = F(u) = c_0 u^n + c_1 u^{n-1} + c_2 u^{n-2} + \ldots + c_{n-1} u + c_n = 0,$$

con

$$c_i = \frac{1}{(n-i)!} f^{(n-i)}(x_0) \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n-1, n),$$

Formiamo poi la nuova equazione algebrica di grado $2n$:

$$\Phi(\zeta) = F(i\zeta) F(-i\zeta) = A_0 \zeta^n + A_1 \zeta^{n-1} + A_2 \zeta^{n-2} + \ldots + A_{n-1} \zeta^1 + A_n = 0,$$

con

$$A_r = \sum_{i+j=2r} (-1)^{r+i} c_i c_j = \sum_{i+j=2r} (-2)^{r+i} \frac{f^{(n-i)}(x_0)}{(n-i)!} \frac{f^{(n-j)}(x_0)}{(n-j)!},$$

$$(r = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

la quale contiene soltanto potenze pari di ζ. Ad ogni coppia di radici complesse coniugate della $F(u) = 0$, corrisponde una quaterna di radici della $\Phi(\zeta) = 0$, disposte nei vertici di un rettangolo che ha il centro nell'origine e i lati paralleli agli assi, e viceversa. Queste radici hanno tutte la stessa multiplicità. Il problema proposto è dunque equivalente a quello della ricerca delle *condizioni affinchè un' equazione algebrica a coefficienti reali e contenente solo potenze pari dell'incognita, abbia le radici tutte con coefficiente dell' immaginario esterno, oppure non interno, all' intervallo* $-\frac{\delta}{2} \quad \frac{\delta}{2}$. Una tale ricerca non è se non formalmente meno generale, di quella delle condizioni affinchè alla proprietà enunciata soddisfi *un' equazione algebrica a coefficienti reali e di grado pari, senza pregiudizio che in essa compariscano anche i termini di grado inferiore dispari.*

Possiamo dunque limitarci a considerare quest'ultimo problema [1]).

2. Cerchiamo dunque le condizioni affinchè un'equazione algebrica, a coefficienti reali e di grado pari,

$$(1) \qquad f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_{n-1} z + a_n = 0,$$

nella quale supponiamo $a_0 > 0$, abbia le radici tutte con coefficiente dell'immaginario esterno (non interno) all'intervallo $-\frac{\delta}{2}\ \frac{\delta}{2}$, essendo δ un numero reale positivo qualunque: cioè abbia le radici tutte esterne (non interne) alla striscia a lati paralleli all'asse reale, simmetrica rispetto a questo asse e di ampiezza δ.

La sostituzione lineare

$$z = \frac{\delta^2}{\zeta + \delta} + x,$$

porta la regione del piano complesso z esterna al cerchio C_x di raggio $\frac{\delta}{2}$ e di centro $x + \frac{\delta}{2}$, nella regione del piano ζ a sinistra dell'asse immaginario.

Nella nuova variabile ζ, la (1), moltiplicata per $(\zeta + \delta)^n$, si scrive anzitutto

$$\sum_{r=0}^{n} \frac{1}{r!} f^{(r)}(x)\, \delta^{2r} (\zeta + \delta)^{n-r} = 0.$$

Sviluppando secondo le potenze decrescenti di ζ, si ottiene una nuova equazione a coefficienti reali, che scriviamo nella forma seguente:

$$(2) \qquad u_0 \zeta^n + u_1 \delta \zeta^{n-1} + u_2 \delta^2 \zeta^{n-2} + \ldots + u_{n-1} \delta^{n-1} \zeta + u_n \delta^n = 0,$$

con

$$u_k = \sum_{s=0}^{k} \frac{1}{s!} \binom{n-s}{k-s} \delta^s f^{(s)}(x) \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Con facili trasformazioni, si ottengono le espressioni delle u_k in funzione di x, cioè:

$$u_k = \sum_{r=0}^{n} A_{kr}\, x^{n-r},$$

---

[1]) La condizione che l'equazione algebrica sia di grado pari è evidentemente necessaria, poichè ogni equazione di grado dispari ha almeno una radice reale.

essendo

$$A_{kr} = \begin{cases} (\text{per } r \leq k) \displaystyle\sum_{s=0}^{r} \binom{n-s}{k-s} \binom{n-r+s}{s} a_{r-s}\delta^s \\ (\text{per } r > k) \displaystyle\sum_{s=0}^{k} \binom{n-s}{k-s} \binom{n-r+s}{s} a_{r-s}\delta^s. \end{cases}$$

Osserviamo ora che, quando x percorre l'intero asse reale, il cerchio C_x spazza l'intera striscia. Perciò le condizioni, affinchè le radici siano esterne (non interne) alla striscia, sono quelle affinche l'equazione (2) abbia tutte le radici a parte reale negativa (non positiva), *qualunque sia* x. Scriviamo ora la matrice indefinita di Hurwitz dell'equazione (2):

$$\begin{vmatrix} u_1\delta & u_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ u_3\delta^3 & u_2\delta^2 & u_1\delta & u_0 & 0 & 0 & \dots \\ u_5\delta^5 & u_4\delta^4 & u_3\delta^3 & u_2\delta^2 & u_1\delta & u_0 & \dots \\ u_7\delta^7 & u_6\delta^6 & u_5\delta^5 & u_4\delta^4 & u_3\delta^3 & u_2\delta^2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

Le condizioni affinchè le radici della (2) siano tutte a parte reale negativa, si enunciano esprimendo che i primi n minori principali di questa matrice sono positivi. Ora si riconosce immediatamente che, in ciascuno di questi determinanti, si possono raccogliere in evidenza tutti i fattori δ, distribuiti nei singli termini della matrice stessa. Perciò le condizioni possono più semplicemente enunciarsi, esprimendo che i primi n minori principali della matrice

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ u_3 & u_2 & u_1 & u_0 & 0 & 0 & \dots \\ u_5 & u_4 & u_3 & u_2 & u_1 & u_0 & \dots \\ u_7 & u_6 & u_5 & u_4 & u_3 & u_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

sono positivi. Questi minori sono evidentemente dei polinomi nelle due variabili x, δ. Scriviamo precisamente, ordinando tali polinomi rispetto alla x,

$$\Delta_i = \Delta_i(x|\delta) = \begin{vmatrix} u_1 & u_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ u_3 & u_2 & u_1 & u_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{2i-1} & u_{2i-2} & u_{2i-3} & u_{2i-4} & \dots & u_i \end{vmatrix} = \sum_{k=0}^{ni} P_{ik}(\delta)\, x^{ni-k}$$

$$(i = 1, 2, \dots, n).$$

Ciascuno dei coefficienti $P_{ik}(\delta)$ è un polinomio in δ, il cui grado è il più piccolo dei due numeri $\frac{i(i+1)}{2}$, k. Si trova, con semplice calcolo:

$$P_{ik} = \sum_{s_1+s_2+\ldots+s_i=k} \begin{vmatrix} A_{1,s_1} & A_{0,s_2} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ A_{3,s_1} & A_{2,s_2} & A_{1,s_3} & A_{0,s_4} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{2i-1,s_1} & A_{2i-2,s_2} & A_{2i-3,s_3} & A_{2i-4,s_4} & \ldots & \ldots & A_{i,s_i} \end{vmatrix}.$$

Possiamo così enunciare il

Teor. I. *Condizioni necessarie e sufficienti affinchè le radici dell'equazione* (1) *abbiano tutte coefficiente dell'immaginario esterno all'intervallo* $-\frac{\delta}{2}$ $\frac{\delta}{2}$, *sono che gli* $n+1$ *polinomi nella variabile* x

$$u_0 = f(x), \qquad \Delta_i(x|\delta)$$

siano tutti definiti positivi sull'intero asse reale.

Supponiamo ora soltanto che questi $n+1$ polinomi in x siano semidefiniti positivi sull'intero asse reale. In tale ipotesi, i valori reali di x per cui almeno uno di questi polinomi assume il valore zero, sono certo in numero finito $\left(\text{al più } n\frac{n^2+n+2}{2}\right)$. Le radici della (1) sono dunque ancora tutte esterne a tutti i centri C_x, fatta al più eccezione di un numero finito di assi. Si ha così il

Teor. II. *Condizioni necessarie e sufficienti affinchè nessuna radice dell'equazione* (1) *abbia coefficiente dell'immaginario interno all'intervallo* $-\frac{\delta}{2}$ $\frac{\delta}{2}$, *sono che gli* $n+1$ *polinomi nella variabile* x

$$u_0 = f(x), \qquad \Delta_i(x|\delta)$$

siano tutti semidefiniti positivi sull'intero asse reale.

3. Le condizioni enunciate dal secondo teorema, possono esprimersi in altro modo, facendo applicazione del teorema di Sturm.

Anzitutto osserviamo che *l'ipotesi che il polinomio* $u_0 = f(x)$ *sia definito positivo, è implicita nelle condizioni enunciate dal teor. II.* Supponiamo dunque ora esplicitamente che questo polinomio sia definito positivo sull'intero asse reale.

Può accadere che qualcuna delle n equazioni algebriche

$$\Delta_i(x|\delta) = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

abbia radici multiple (reali o complesse). Esisterà però in ogni caso un numero positivo ε tale che, per ogni valore δ' per cui sia

$$0 < \delta - \delta' < \varepsilon,$$

le n equazioni algebriche

$$\Delta_i(x, \delta') = 0$$

hanno tutte radici semplici. Se dunque, in corrispondenza di ognuna di tali equazioni, formiamo con le regole note la successione di STURM e valutiamo i segni che tale successione assume per $x = \mp\infty$, otterremo corrispondentemente due successioni di segni e potremo esprimere il teor. II dicendo che: *nell' ipotesi che $f(x)$ sia definito positivo, condizioni necessarie e sufficienti affinchè nessuna radice dell' equazione* (1) *abbia coefficiente dell' immaginario interno all' intervallo* $-\frac{\delta}{2}\ldots\frac{\delta}{2}$, *sono che le n successioni di* STURM *dedotte dai polinomi* $\Delta_i(x, \delta')$, *per* $\delta' < \delta$ *e prossimo a* δ, *non presentino variazioni di segno, nel passaggio da* $-\infty$ *a* $+\infty$.

Nuovo metodo per la Geometria delle serie lineari delle curve algebriche

Nota del prof. **Federico Amodeo**, *presentata dal socio* **E. Pascal**

(Adunanza del dì 1. dicembre 1938 - XVII)

Sunto. — Riprendendo l'argomento dopo 38 anni e basandosi sugli stessi concetti delle sue antiche ricerche, l'A. parte dalle curve di genere massimo per arrivare a quelle di genere minore fino alle curve ellittiche e alle razionali. In questa Memoria si limita alle curve generali nel loro ordine. Col metodo prescelto gli riesce facile di definire le serie complete segate da qualunque sistema di curve aggiunte alla C_p^m, dagli ordini più elevati ai minimi; di trovare le proprietà delle differenze fra ordine e dimensione delle serie da essi segate; di valutare le variazioni di questa differenza al variare dell'ordine e del genere della C_p^m; di determinare i punti fissi delle diverse *serie canoniche*; e le proprietà del rapporto fra l'ordine e la dimensione di ogni serie completa. Con ciò riesce a stabilire la *gonalità* delle singole curve algebriche generali nel loro ordine, e di qualunque genere nell'ordine. Ricordata una costruzione già da lui trovata delle curve di genere massimo, egli trova una relazione fra le dimensioni di tre sistemi di curve tutte aggiunte o non; e fa notare: che di questa relazione è caso particolarissimo il teorema di Riemann-Roch per le curve generali nel loro ordine. In ultimo estende la detta relazione alle dimensioni di quattro sistemi di curve tutte aggiunte o non.

Dal 1891 al 1900 furono da me pubblicate le seguenti Memorie sulla *Geometria delle curve algebriche:*

1. *Le corrispondenze univoche sulle curve ellittiche di ordine* n *normali di uno* S_{n-4}. (Ann. di Matem., v. 19, 1891, (agosto 1890).
2. *Corrispondenze univoche singolari delle curve ellittiche armoniche ed equianarmoniche.* (Ann. di Matem., v. 19, 1891, ottobre 1890).
3. *Contribuzione alla teoria delle serie irrazionali involutorie* ∞^1 *giacenti sulle varietà algebriche ad una dimensione.* (Ann. di Matem., v. 20, 1892, giugno 1892).
4. *Curve aggiunte minime.* (Rend. R. Acc. Lincei, v. 2. 1893, 21 maggio, p. 450-467).
5. *Serie residue nella serie canonica delle curve aggiunte di ordine* $m-3-\alpha$. (Rend. R. Acc. Lincei, v. 2, 1893, 3 giugno, p. 528-532).
6. *Curve k-gonali.* (Ann. di Matem., v. 21, 1893. p. 281-236, giugno).

7. *Curve k-gonali di 1ª e di 2ª specie.* (Ann. di Matem., v. 24, 1896, p. 1-22, agosto 1893).
8. *Sistemi lineari di curve algebriche di genere massimo ad intersezioni variabili collineari.* (Rend. R. Acc. Sc. fis. e mat. Napoli, 1896, 7 marzo).
9. *Curve aggiunte e serie specializzate.* (Rend. R. Acc. Sc. Napoli, 1896, 28 novembre).
10. *Curve k-gonali di s-esima specie.* (Atti R. Acc. Sc. Napoli, s. 2ª, v. IX, 1897, 23 ottobre).
11. *Spazio normale e genere massimo delle curve di ordine m, k-gonali, di specie* s. (Rend. R. Acc. Sc. Napoli, 1898, 23 ottobre).
12. *Courbes normales trigonales du plan.* (Comptes Rendus, Paris, 1900, 25 giugno).
13. *Curve di gonalità* k *con punti fissi nella* (k—1)*esima serie canonica e curve trigonali del piano.* (Rend. R. Acc. Sc. Napoli, 1900, 7 luglio).
14. *Coup d'oeil sur les courbes algébriques au point de vue de la gonalité.* (Deuxième Congrès Intern. des Mathématiciens, Paris, 1900); tradotta in italiano nel Periodico di Matem. Livorno, 1900, v. 16).
15. *Contributo alla determinazione delle sovrabbondanze dei sistemi di curve algebriche.* (Rend. R. Acc. Sc. Napoli, 1900, dicembre).

Ora, dopo 38 anni, ho voluto rivedere i risultati allora ottenuti, e confrontarli con quelli dei tanti geometri che hanno lavorato sugli stessi argomenti, risalendo ad Abel, a Riemann, a Clebsch, a Brill, a Nöther e venendo giù giù fino ai geometri viventi, fra i quali Severi ha dato alla teoria una grande perfezione col suo *metodo rapido* [1]). Mi è apparso che qualcuno dei miei concetti, allora esposti, potrebbe far compiere ancora un cammino utile, che, anche adesso, dopo tanti anni, potrebbe apportare qualche novità nella teoria delle serie lineari delle curve algebriche. Perciò mi sono determinato di redigere alcune poche Note, che valgano ad illustrare e completare i concetti espressi allora.

È stato da me sempre condiviso il parere, da F. Klein più volte espresso, che il *genere* delle curve algebriche, non essendo carattere esclusivo delle dette curve (appartenendo anche nell'*Analysis situs* a tutte le superficie deformabili che si trasformano l'una nell'altra con continuità senza strappi nè duplicature) deve essere coadiuvato da qualche altro carattere esclusivo delle curve algebriche; tanto più che, mentre le curve che si trasformano birazionalmente l'una nell'altra hanno lo stesso *genere*, viceversa curve dello stesso genere possono avere proprietà differentissime non invariantive dall'una all'altra.

Queste mie Note potrebbero dare qualche lume su questo argomento. Risulta già da questa, che il numero dei punti doppi (o multipli) di una curva

[1]) Cfr. Severi, *Trattato di Geometria algebrica*, Bologna, Zanichelli, 1924, Cap. V.

algebrica e la loro disposizione, lo studio di tutti i sistemi di tutte le curve aggiunte alla curva fondamentale [1]) fanno pervenire con estrema facilità a teoremi faticosamente conquistati e fanno evitare una quantità di lemmi e teoremi di ripiego. Sopratutto fanno risultare che la teoria delle serie lineari, nata dagli *integrali abeliani* e dalle *superficie di* RIEMANN, non ha quasi più bisogno di queste elevate teorie analitiche, e si potrebbe riattaccarla direttamente alla *Teoria generale delle curve piane* del grande CREMONA.

§ 1. — *Serie lineari complete.*

1. Indicheremo, in quanto qui scriviamo, con C_p^m la curva fondamentale piana che supporremo sempre irreduttibile, con m l'ordine, con p il genere e supporremo che la curva sia dotata soltanto di punti doppi (o cuspidi). Il più alto genere che la curva C_p^m può avere è $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ e per brevità questo lo indicheremo con π, adozione che non può generare confusione col significato dato a π in geometria, poichè la geometria di cui qui si parla non appartiene al gruppo fondamentale *(metrico)* [2]).

2. In quanto alla posizione dei punti doppi della curva piana, distingueremo due casi. Dapprima supporremo che quei punti siano distribuiti nel piano in modo che mai 3 siano per diritto, mai 6 appartengano ad una conica, mai 10 appartengano ad una cubica, 15 ad una quartica, 21 ad una quintica, ecc. ecc. e questi li diremo *indipendenti*; e poi esamineremo il caso in cui la posizione di alcuni di essi sia dipendente da quella di altri, cioè che 3 o più siano per diritto, 6 o più appartengano ad una conica, 10 o più appartengano ad una cubica, ecc. ecc., ed in tal caso indicheremo con ρ il numero dei punti doppi la cui posizione è *dipendente* da quella degli altri. In questa prima Nota ci limitiamo a trattare il primo caso; diremo espressamente quando terremo conto del numero ρ.

3. Indicheremo con $C^{m-3-\alpha}$ le curve oggiunte alla C_p^m fondamentale, con α intero (nullo, positivo o negativo) limitandoci però alle curve agg. di ordine minore di m, essendo già noto il caso dell'ordine $\geq m$. Quando la curva fondamentale è del massimo genere, C_π^m, le curve aggiunte ad essa di un determinato ordine $m-3-\alpha$, sono tutte le curve del piano di questo ordine (siano esse intere o spezzate) e perciò la serie segata da tutte le curve di un determinato ordine su C_π^m è sempre completa.

---

[1]) Questo era il mio punto di partenza 45 anni fa (1893, Mem. n. 4).

[2]) Cfr. AMODEO, *Origine e Sviluppo della Geometria proiettiva*, Napoli, Pellerano, 1939, § 18, p. 127.

L'*ordine* N_α di questa serie è data (per $\alpha > -3$) dal numero

$$N_\alpha = m(m-3-\alpha),$$

la *dimensione* R_α è data dal numero dei punti che individuano la curva

$$R_\alpha = \frac{1}{2}(m-3-\alpha)(m-\alpha).$$

Quindi si ha il teorema:

Teor. 1.° *Tutte le curve del piano* $C^{m-3-\alpha}$ *di ordine* $< m$ *segano su* C^m_π *una serie lineare completa* $g^{\frac{1}{2}(m-3-\alpha)(m-\alpha)}_{m(m-3-\alpha)}$.

4. In seguito qualche volta occorrerà indicare l'ordine della curva aggiunta con $m-1-k$ (k intero, nullo o positivo) in tal caso la serie segata dalle C^{m-1-k} del piano sullla C^m_π è una $g^{\frac{1}{2}(m-1-k)(m+2-k)}_{m(m-1-k)}$ e cioè

$$N_k = m(m-1-k) \quad , \quad R_k = \frac{1}{2}(m-1-k)(m+2-k).$$

Fra k ed α vi è la relazione

$$k = 2+\alpha.$$

5. Il teorema precedente si generalizza a tutte le curve di genere differente, minore di π, con la seguente considerazione.

Il passaggio, dalla curva di genere massimo C^m_π ad una curva di genere minore p, si ottiene facendo acquistare alla curva C^m uno o più puuti doppi. Per ogni punto doppio che la curva acquista le curve del piano debbono passare per esso semplicemente e quindi la dimensione R_α della serie segata dalle $C^{m-3-\alpha}$ diminuisce di una unità e ciò sempre, per la ipotesi e per la definizione premesse, che i punti doppi siano di posizione indipendente, e quindi per la curva C^m con d punti doppi (o cuspidi) e per α maggiore di -3,

$$R_\alpha = \frac{1}{2}(m-3-\alpha)(m-\alpha) - d.$$

L'ordine N_α diminuisce di due unità per ogni punto doppio, quindi

$$N_\alpha = m(m-3-\alpha) - 2d.$$

6. Introduciamo ora nella espressione di N_α ed R_α il genere p della

curva fondamentale, definito come differenza $\pi - d$,

$$p - \frac{1}{2}(m-1)(m-2) - d$$

e si ha in funzione di α (> -3),

$$N_\alpha = 2p - 2 - m\alpha \qquad R_\alpha = p - 1 - m\alpha + \frac{\alpha(\alpha+3)}{2}$$

ed in funzione di k (positivo)

$$N_k = 2p - 2 - (k-2)\alpha \quad , \quad R_k = p - 1 - (k-2)\alpha + \frac{(k-2)(k+1)}{2}.$$

Possiamo dunque enunciare con la più grande generalità:

Teor. 2.° *Per le curve aggiunte di ordine $< m$, tutte le serie segate da tutti i sistemi di curve aggiunte di un dato ordine sulla C^m_p di genere qualunque, fuori dei punti doppi, quando le posizioni dei detti punti doppi sono fra loro indipendenti, sono lineari e complete.*

7. Sulla restrizione posta, che i punti doppi della curva C^m_p debbano avere posizioni indipendenti, occorre fare una distinzione.

Una curva di ordine $\geq m-3$ è individuata da un numero di punti $\geq \frac{1}{2}m(m-3)$, e perciò le curve C^m_p che hanno un numero di punti doppi $\leq \frac{1}{2}m(m-3)$, come sono quelle di genere ≥ 1, presentano condizioni tutte indipendenti per le curve aggiunte di ordine $m-3$ o maggiore. Le curve di genere *zero*, cioè quelle che hanno ancora un punto doppio in più di $\frac{1}{2}m(m-3)$, non hanno curve aggiunte di ordine $m-3$, ma hanno quelle di ordine $m-2$, $m-1$, per le quali vale quanto si è detto sopra; buindi il teorema si può modificare così:

Teor. 3.° ***a).*** *Le curve aggiunte C^{m-1}, C^{m-2}, C^{m-3} di ordine $m-1$, $m-2$, $m-3$ esistono sempre qualunque sia la disposizione dei punti doppi della C^m_p e segano sulla C^m_p serie lineari e complete;* e quindi anche,

b). La serie g^{p-1}_{2p-2} segata dalla C^{m-3} agg. è lineare e completa.

Non avviene lo stesso per le curve aggiunte $C^{m-3-\alpha}$ (α positivo) perchè, a cominciare da quelle di ordine $m-4$, il numero dei punti doppi supera il numero delle condizioni che occorrono per individuarle, e quindi, se le loro posizioni sono fra loro indipendenti, come detto sopra, non rendono possibile la esistenza delle dette curve aggiunte. Esse esisteranno, se le posizioni dei punti doppi *non sono* fra loro indipendenti, ma di questo tratteremo in altra Nota.

§ 2. — *Differenza* $N_\alpha - R_\alpha$.

1. Fra i numeri N ed R è importante considerare la differenza $N-R$ ed il rapporto N/R; e ciò faremo per curve aggiunte di ordine $< m$.

Per ora tratteremo della *differenza*.

Esprimendola col simbolo α ($\alpha > -3$) si ha per le curve C_π^m (genere massimo)

$$N_\alpha - R_\alpha = \frac{1}{2}(m-3-\alpha)(m+\alpha)$$

e col simbolo k (k positivo)

$$N_k - R_k = \frac{1}{2}(m-1-k)(m-2+k).$$

In particolare:

per $\alpha = -2, -1$ $\quad N-R = \frac{1}{2}(m-1)(m-2)$

$\alpha = 0$ $\quad N-R = \frac{1}{2}m(m-3)$

$\alpha = 1$ $\quad N-R = \frac{1}{2}(m+1)(m-4)$

$\alpha = 2$ $\quad N-R = \frac{1}{2}(m+2)(m-5)$

$\alpha = 3$ $\quad N-R = \frac{1}{2}(m+3)(m-6)$, ecc. ecc.

2. Per le curve C_p^m di genere minore del massimo si ha invece in generale per le $C^{m-3-\alpha}$

$$N_\alpha - R_\alpha = \frac{1}{2}(m-3-\alpha)(m+\alpha) - d,$$

e per C^{m-1-k}

$$N_k - R_k = \frac{1}{2}(m-1-k)(m-2+k) - d.$$

In particolare, per le $C^{m-3-\alpha}$ obbligate a passare per punti fissi:

Teor. 1.° *Ogni serie segata su* C_p^m *da curve aggiunte* $C^{m-3-\alpha}$ *di ordine* $< m$, *obbligate a passare per un gruppo di punti fissi generici della* C_p^m, *è sempre completa e per esse* la *differenza* $N_\alpha - R_\alpha$ *resta invariata.*

3. Introduciamo ora nella espressione $N_\alpha - R_\alpha$ il genere p della curva

fondamentale (definito come differenza fra π e d):

$$p = \frac{1}{2}(m-1)(m-2) - d.$$

Si ha in funzione di α ($\alpha > -3$)

$$N_\alpha - R_\alpha = p - \frac{1}{2}(\alpha+1)(\alpha+2)$$

ed in funzione di k (k positivo)

$$N_k - R_k = p - \frac{1}{2}(k-1)k.$$

Da queste si deduce che

per $\alpha = -2, -1$ $\quad N - R = p$
$\alpha = 0$ $\quad N - R = p - 1$
$\alpha = 1$ $\quad N - R = p - 3$
$\alpha = 2$ $\quad N - R = p - 6$
$\alpha = 3$ $\quad N - R = p - 10$ e poi, $p - 15$, $p - 21$, ecc. ecc.

Cioè:

Teor. 2.° *Sempre nell'ipotesi che i punti doppi siano indipendenti, la differenza fra l'ordine N e la dimensione R delle serie segate sopra una curva C_p^m di ordine e genere qualunque, da qualunque sistema di curve aggiunte di ordine $< m$, è massima ed eguale a* p *per le curve agg.* C^{m-1}, C^{m-2}
è » $p-1$ » » » C^{m-3}
» » $p-3$ » » » C^{m-4}
» » $p-6$ » » » C^{m-5}
e così via » $p-10$, $p-15$, $p-21$, ecc. ecc.

Dunque:

Teor. 3.° *Per le curve agg. di ordine $m-1$, $m-2$ al più p punti d'intersezione con la C_p^m fuori dei punti doppi sono determinati dai rimanenti* [1]); *per le curve agg. C^{m-3} al più $p-1$ punti sono determinati dai rimanenti; per le curve agg. $C^{m-3-\alpha}$* (α positivo) *al più $p - \frac{1}{2}(\alpha+1)(\alpha+2)$ sono determinati dai rimanenti.*

4. È utile ricordare che Brill e Nöther (Math. Ann. v. 7. 1874) chiamarono *serie speciali* quelle segate dalle curve aggiunte C^{m-3}, per le quali la differenza

$$N_0 - R_0 = p - 1.$$

---

[1]) In particolare per $p = 0$, *le serie segate sulle curve razionali dalla C^{m-1}, C^{m-2}* (che sono le loro curve agg. minime) *hanno l'ordine eguale alla demensione.*

Nel 1893 fu da me introdotto il nome di *serie specializzate* per quelle segate da curve agg. $C^{m-3-\alpha}$, α positivo (vedi Mem. n. 5); propriamente

sono serie specializzate 1 volta quelle che hanno $N_1 - R_1 = p - 3$
» » » 2 volte » » » $N_2 - R_2 = p - 6$
» » » 3 volte » » » $N_3 - R_3 = p - 10$ ecc.

SEGRE chiamò *serie canonica* la g^p_{2p-2} segata dalle C^{m-3} aggiunte e fu da me introdotto il nome di

2.ª *serie canonica* per quella che ha $N_1 - R_1 = p - 3$
3.ª » » » » » » $N_2 - R_2 = p - 6$, ecc.

Quindi, in particolare per le curve aggiunte $C^{m-3-\alpha}$ (α positivo), il teorema 3.° precedente si può anche enunciare così:

Nella $(\alpha+1)$*esima serie canonica (serie specializzata* α *volte) al più* $p - \frac{1}{2}(\alpha+1)(\alpha+2)$ *punti, fra quelli del gruppo generale* N_γ, *sono determinati dai rimanenti, sempre nell'ipotesi che i punti doppi della curva fondamentale* C^m_p *siano indipendenti.*

§ 3. — *Variazioni di* $N_\alpha - R_\alpha$.

1. È utile esaminare che cosa avviene per N_α ed R_α quando il genere della curva C^m_p resta inalterato e l'ordine si aumenta di una o più unità, cioè passi dall'ordine m all'ordine $m' = m + \mu$.

Per il valore m della C^m_p si ha (per $\alpha > -3$)

$$N_\alpha = 2p - 2 - m\alpha \qquad R_\alpha = p - 1 - m\alpha + \frac{\alpha(\alpha+3)}{2}$$

e per il valore m'

$$N'_\alpha = 2p - 2 - m'\alpha \qquad R'_\alpha = p - 1 - m'\alpha + \frac{\alpha(\alpha+3)}{2}$$

e cioè

$$N'_\alpha = N_\alpha - \mu\alpha \qquad R'_\alpha = R_\alpha - \mu\alpha$$
$$N'_\alpha - R'_\alpha = N_\alpha - R_\alpha$$

Dunque:

Teor. 1.° *Per le curve piane a punti doppi indipendenti di egual genere, facendo aumentare l'ordine di* μ *unità la serie segata dalle* $C^{m-3-\alpha}$ *agg. perde* $\mu\alpha$ *unità nell'ordine e nella dimensione e quindi* $N_\alpha - R_\alpha$ *resta invariata.*

2. Questo risultato non è privo d'interesse, poichè aumentando l'ordine della curva (senza alterarne il genere) si giunge a curve che presentano una minima dimensione della serie $g^{N_\alpha}_{R_\alpha}$ e quindi anche ad un minimo ordine, e si può giungere al caso che la serie sia costituita da un gruppo di punti fissi.

Così, prendiamo le curve di genere 10 di cui l'ordine più piccolo è 6.

Per i valori di

$$\alpha = 1 \ , \ 2$$

le serie segate sulla C^6_{10} sono g^5_{12} , g^2_6

» » » C^7_{10} » g^4_{11} , g^0_4

» » » C^8_{10} » g^3_{10} —

» » » C^8_{10} » g^2_9

» » » C^{10}_{10} » g^1_8

e quindi si trova che la curva C^{10}_{10} ha come minima serie una g^1_8, come la C^{10}_{35}, con la diversità che la C^{10}_{35} ha una sola g^1_8 segata dalle rette che passano pel suo unico punto doppio, mentre la C^{10}_{10} ha una g^1_8 segata da un fascio di quartiche aggiunte che passano per i suoi 26 punti doppi, ed almeno altre 26 g^1_8 segate dai fasci di rette che hanno per centri ciascuno dei punti doppi.

Un esempio più convincente si ha dalle curve di genere 28, delle quali quella di ordine più piccolo è la C^9.

Per i valori di

$$\alpha = \quad 1. \quad 2. \quad 3. \quad 4. \quad 5.$$

le serie segate sulle C^9_{28} sono g^{20}_{45} g^{14}_{36} g^9_{27} g^3_{18} g^2_9

» » » C^{10}_{28} » g^{19}_{44} g^{12}_{34} g^6_{24} g^1_{14}

» » » C^{11}_{28} » g^{18}_{43} g^{10}_{32} g^3_{21}

» » » C^{12}_{28} » g^{17}_{42} g^8_{30} g^1_{18}

e si trova che la curva di genere 28 di ordine 10 ha una serie minima g^1_{14}, mentre la curva di genere 28 di ordine 12 ha come serie minima una g^1_{18}, ecc.

Gli esempi si potrebbero moltiplicare; ma importa notare che qui non avviene come nelle trasformazioni cremoniane, ove il genere resta inalterato e con esso si conservano le serie della prima curva sulla sua trasformata. Qui si hanno curve dello stesso genere non trasformabili birazionalmente l'una nell'altra, che hanno proprietà diversissime per le serie che su di esse si presentano: eppure sono tutte generali nel loro ordine. Ciò si rispecchia nel classico esempio della C^5_6 che si trasforma birazionalmente nella C^7_6 con 9 punti doppi, mentre la C^7_6 con 9 punti doppi indipendenti è diversa dalla prima. La prima è curva singolare nel suo genere, la seconda è curva generale.

3. Un'altra variazione è utile esaminare. Il cambiamento che avviene nella differenza $N_\alpha - R_\alpha$, se si aumenta di μ unità l'ordine della curva e si resta invariato il numero dei punti doppi.

La differenza

$$N_\alpha - R_\alpha = \frac{1}{2}(m-3-\alpha)(m+\alpha) - d$$

per $m' = m + \mu$ ci dà

$$\begin{aligned} N'_\alpha - R'_\alpha &= \frac{1}{2}(m+\mu-3-\alpha)(m+\mu+\alpha) - d \\ &= \frac{1}{2}[(m-3-\alpha)(m+\alpha) + \mu(2m-3) + \mu^2] - d \\ &= N_\alpha - R_\alpha - \frac{\mu}{2}(2m+\mu-3). \end{aligned}$$

In particolare per $\mu = 1$

$$N'_\alpha - R'_\alpha = N_\alpha - R_\alpha + (m-1).$$

Così, passando dalla C^7 con d punti doppi alla C^8 con d punti doppi, la differenza $N_\alpha - R_\alpha$ aumenta di 6 unità; e passando dalla C^8 alla C^9 aumenta di 7 unità; e passando dalla C^9 alla C^{10} aumenta di 8 unità.

Per verifica passando dalla C^7 alla C^{10} con d punti doppi la differenza aumenta di $6+7+8 = 21 = \frac{3}{2}(14+3-3)$.

§ 4. — *Punti fissi nelle serie canoniche.*

1. Per trovare il numero dei punti fissi della seria canonica $g^{R_\alpha}_{N_\alpha}$

segate dalle $C^{m-3-\alpha}$ (α positivo) bisogna porre $R_\alpha = 0$, da cui si ricava

$$p = 1 + m\alpha - \frac{\alpha(\alpha+3)}{2}$$

che sostituito nel valore di N_α ci dà

$$N_\alpha = \alpha(m-3-\alpha),$$

cioè il numero dei punti fissi, allorquando la dimensione della $g^{R_\alpha}_{N_\alpha}$ è ridotta a zero, è *eguale al prodotto di α per l'ordine della curva aggiunta che li determina.*

In particolare per le rette aggiunte $= \alpha$
» coniche aggiunte $= 2\alpha$
» cubiche aggiunte $= 3\alpha$, ecc.

Invece per la 1.ª serie canonica esso $= 0$
» 2.ª serie canonica $= m-4$
» 3.ª » » $= 2(m-5)$
» 4.ª » » $= 3(m-6)$ ecc.

Cosicchè possiamo enunciare:

1.° *La serie segata dalle curve aggiunte di ordine $m-3$, cioè la g^{p-1}_{2p-2} non ha punti fissi fuori dei punti doppi della C^m_p.*

2.° *La serie segata dalle $C^{m-3-\alpha}$ agg., cioè la $(\alpha+1)$esima serie canonica, ha sempre punti fissi fuori dei punti doppi della C^m_p in numero $= \alpha(m-3-\alpha)$* [1].

2. Per esempio:

Le curve che hanno 2 soli punti doppi hanno una retta aggiunta, la quale deve segare la C^n_p in α punti fissi.

Ciò importa però che si abbia $m-3-\alpha = 1$, da cui $\alpha = m-4$. Così la C^{18}_{134} con 2 p. d. dà $\alpha = 14$, quindi la retta aggiunta sega una g^0_{14}.

Le curve che hanno soltanto 5 punti doppi indipendenti hanno una sola conica aggiunta, la quale deve segare la C^m_p in 2α punti fissi. Ma ciò importa che sia $m-3-\alpha = 2$, cioè $\alpha = m-5$. Così la C^{10}_{31} con 5 p. d. indipendenti dà $\alpha = 5$ ed ha per serie canonica segata dalle coniche agg. una g^0_{10}.

Le curve che hanno soltanto 9 p. doppi indipendenti, hanno una sola cubica aggiunta e questa deve segare la C^m_p in 3α punti fissi. Ciò importa che sia $m-3-\alpha = 3$, cioè $\alpha = m-6$. Così la C^{10}_{37} con 9 p. doppi dà $\alpha = 4$ ed ha per serie canonica segata dalla cubica aggiunta una g^0_{12}.

---

[1]) Severi, l. c. p. 161, ottiene questo teorema in base al teorema di Clifford.

Le curve che hanno 14 p. doppi indipendenti hanno una sola quartica agg. che deve segare la C_p^m in 4α punti fissi. Ciò importa che sia $m-3-\alpha=4$, cioè $\alpha=m-7$. Così la C_{31}^{11} con 14 p. doppi indipendenti dà $\alpha=4$ ed ha per serie canonica segata dalla quartica aggiunta una g_{16}^0. Ecc. ecc.

3. Non è privo d'interesse il considerare il seguente quadro dei gruppi di punti fissi nelle diverse serie canoniche a cominciare dalla seconda.

Serie canoniche:							2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª
Sulla				C_4^5			g_1^0					
			C_5^6	C_8^6	rispettivamente		g_2^0	g_2^0				
		C_6^7	C_{10}^7	C_{13}^7	»		g_3^0	g_4^0	g_3^0			
	C_7^8	C_{12}^8	C_{16}^8	C_{19}^8	»		g_4^0	g_6^0	g_6^0	g_4^0		
C_8^9	C_{14}^9	C_{19}^9	C_{23}^9	C_{26}^9	»		g_5^0	g_8^0	g_8^0	g_8^0	g_5^0	
C_9^{10}	C_{17}^{10}	C_{22}^{10}	C_{27}^{10}	C_{31}^{10}	C_{34}^{10}	»	g_6^0	g_{10}^0	g_{12}^0	g_{12}^0	g_{10}^0	g_6^0

Nel quale quadro si nota, per ciascuna serie canonica, il numero sempre crescente dei punti fissi, coll'aumentare dell'ordine della curva fondamentale, con la seguente legge costante.

a) Nella 2ª serie canonica i punti fissi aumentano di una unità per ogni aumento del grado della curva C_p^m;

Nella 3ª serie canonica i punti fissi aumentano di due unità per ogni unità di aumento del grado m;

Nella 4ª serie canonica i punti fissi aumentano di tre unità e così via.

b) I punti fissi delle serie canoniche delle curve di uno stesso ordine sono dalla 2ª in poi:

per le	C^6	2	2				
	C^7	3	4	3			
	C^8	4	6	6	4		
	C^9	5	8	9	8	5	ecc.

cioé sono eguali di numero per le serie canoniche estreme e per quelle egualmente lontane dalle estreme.

Con le due regole suddette è facile trovare questi numeri per le curve di qualunque ordine, e prolungare indefinitamente il quadro precedente.

§ 5. *Rapporto N/R*

1. Il rapporto dell'ordine alla dimensione delle serie lineari complete segate sulle curve generali C_π^m, col simbolo α (supposto > -3) prende la forma

$$\frac{N}{R} = 2\,\frac{m}{m-\alpha}$$

e quindi per $\alpha = -1$ o -2

$$\frac{N}{R} = 2\,\frac{m}{m+..}, \qquad \text{cioè } \frac{N}{R} < 2\,, \qquad N < 2R$$

per $\alpha = o$

$$\frac{N}{R} = 2 \qquad N = 2R$$

per α positivo

$$\frac{N}{R} = 2\,\frac{m}{m-..}, \qquad \text{cioè } \frac{N}{R} > 2 \qquad N > 2R$$

e quindi il seguente teorema:

Il rapporto $\frac{N}{R}$ dell'ordine alla dimensione delle serie segate sulla C_π^m dai sistemi delle curve del piano dello stesso ordine è

< 2 *per le curve di ordine* $m-1, m-2$
$= 2$ *per le curve di ordine* $= m-3$
> 2 *per le curve di ordine* $< m-3$

2. Passando dalle curve di genere massimo alle curve C_p^m di genere minore p., essendo d il numero di punti doppi

$$N_\alpha = m(m-3-\alpha) - 2d$$
$$R_\alpha = \frac{1}{2}\,(m-3-\alpha)(m-\alpha) - d$$

il rapporto

$$\frac{N_\alpha}{R_\alpha} = 2\,\frac{m - \dfrac{2d}{m-3-\alpha}}{m-\alpha-\dfrac{2d}{m-3-\alpha}}$$

e quindi per $\alpha = -1$ o -2, indicando con ν il numero positivo $\frac{2d}{m-3-\alpha}$,

$$\frac{N_\alpha}{R_\alpha} = 2\,\frac{m-\nu}{m-\nu+\ldots} < 2,$$

per $\alpha = 0$

$$\frac{N_\alpha}{R_\alpha} = 2\,\frac{m-\nu}{m-\nu} = 2,$$

per α *positivo*

$$\frac{N_\alpha}{R_\alpha} = 2\,\frac{m-\nu}{m-\nu-\ldots} > 2$$

e quindi:

Il rapporto $\frac{N}{R}$ *dell'ordine alla dimensione delle serie segate sulle* C_p^m *dai sistemi delle curve agg. è*

< 2 *per le curve agg. di ordine* $m-1$, $m-2$ [1])
$= 2$ » » » » C^{m-3}
> 2 » » » » *di ordine* $< m-3$.

Questo teorema comprende quello di CLIFFORD e la precisazione fattane da NÖTHER, ma per ora limitatamente alle curve C_p^m a punti doppi indipendenti [2]).

§ 6. — *Gonalità delle curve generali nel loro ordine. Triangolo parabolico*

1. Una curva si dice *k-gonale* o di *gonalità k*, se sia $= k$ il minimo ordine delle serie lineari segate su di essa dalle curve del piano e specialmente dalle curve aggiunte. (Cfr. Memoria *6*).

Gli studi finora pubblicati sulle curve k-gonali hanno fatto risultare curve nella maggioranza *singolari*; anzi le curve generali, fra esse rinvenute, si riducono ad un numero ristrettissimo, appena tre.

Qui vogliamo trovare quale è la gonalità di ciascuna curva generale, per ogni genere di un determinato ordine.

Perchè una curva C_p^m risulti k-gonale si deve trovare nell'ultima serie canonica la esistenza di una g^1_k, con k minimo.

2. Ciò adesso riesce facile per la considerazione introdotta di tutte le serie canoniche di ogni curva generale C_p^m.

---

[1]) Si riconferma che in particolari $\frac{N}{R} = 1$ per le C^{m-1}, C^{m-2}, se la curva C_p^m è razionale.

[2]) Cfr. CLIFFORD, Phil. Trans., v. 169, 1878, p. 881, — NÖTHER, Berl. Abh., 1882, ecc.

Nel seguente quadro abbiamo distribuito in colonna le curve dei successivi ordini C^2, C^3, C^4,... e nella orizzontale rispettiva le curve di generi differenti decrescenti a cominciare dal più elevato, ed abbiamo indicato in testa a ciascuna colonna successiva il numero dei punti doppi posseduti dalla curva, raggruppati come è indicato dalle parentesi, ponendo su ciascuna la curva agg. del grado che può esistere pel numero dei punti doppi indicati fino ad una determinata colonna.

La prima colonna dà la gonalità di tutte le curve di genere massimo; la seconda quella delle curve che hanno un punto doppio, e così di seguito.

Particolarità interessante è questa: che per ogni gruppo di colonne sottostanti alle parentesi, passando da una orizzontale alla seguente l'ordine delle serie in esse indicate aumenta di un'unità per il primo gruppo (formato da 2 colonne), di due unità per il secondo gruppo (di 3 colonne); di 3 unità per il terzo gruppo (di 4 colonne); e così via.

In ogni orizzontale le due ultime serie a destra sono quelle della curva *ellittica* e della curva *razionale* di quell'ordine.

Fatta eccezione di queste, in ogni orizzontale, per le prime serie di ogni gruppo di colonna gli ordini delle estreme e di quelle egualmente distanti dalle estreme sono eguali; proprietà analoga a quella trovata per i gruppi di punti fissi, ma diversa nei numeri.

Per es. nella C^{10} le suddette prime serie hanno gli ordini

9 14 17 18 17 14 9.

Con queste proprietà è possibile prolungare il quadro quanto si vuole, ed avere la *gonalità* di una curva generale di ordine qualunque e di genere qualunque.

Per la sua speciale forma questo quadro lo diciamo *triangolo parabolico*.

TRIANGOLO PARABOLICO

	C^1		C^2			C^3				C^4					C^5						C^6							C_7							
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
C^2	g^1_1																																		
C^3	g^1_2	g^1_1																																	
C^4	g^1_3	g^1_2	g^1_2	g^1_1																															
C^5	g^1_4	g^1_3	g^1_4	g^1_3	g^1_2	g^1_2	g^1_1																												
C^6	g^1_5	g^1_4	g^1_5	g^1_4	g^1_3	g^1_3	g^1_4	g^1_3	g^1_2	g^1_2	g^1_1																								
C^7	g^1_6	g^1_5	g^1_8	g^1_7	g^1_6	g^1_8	g^1_7	g^1_6	g^1_5	g^1_6	g^1_5	g^1_4	g^1_3	g^1_2	g^1_2	g^1_1																			
C^8	g^1_7	g^1_6	g^1_{10}	g^1_9	g^1_8	g^1_{11}	g^1_{10}	g^1_9	g^1_8	g^1_{10}	g^1_9	g^1_8	g^1_7	g^1_6	g^1_7	g^1_6	g^1_5	g^1_5	g^1_3	g^1_2	g^1_2	g^1_1													
C^9	g^1_8	g^1_7	g^1_{12}	g^1_{11}	g^1_{10}	g^1_{14}	g^1_{13}	g^1_{12}	g^1_{11}	g^1_{14}	g^1_{13}	g^1_{12}	g^1_{11}	g^1_{10}	g^1_{12}	g^1_{11}	g^1_{10}	g^1_9	g^1_8	g^1_7	g^1_8	g^1_7	g^1_4	g^1_5	g^1_4	g^1_3	g^1_2	g^1_2	g^1_1						
C^{10}	g^1_9	g^1_8	g^1_{14}	g^1_{13}	g^1_{12}	g^1_{17}	g^1_{16}	g^1_{15}	g^1_{14}	g^1_{18}	g^1_{17}	g^1_{16}	g^1_{15}	g^1_{14}	g^1_{17}	g^1_{16}	g^1_{15}	g^1_{14}	g^1_{13}	g^1_{12}	g^1_{14}	g^1_{13}	g^1_{12}	g^1_{11}	g^1_{10}	g^1_9	g^1_8	g^1_2	g^1_8	g^1_7	g^1_6	g^1_5	g^1_4	g^1_3	g^1_2
...	.....		.....																																
C^{18}	g^1_{17}	g^1_{16}	g^1_{20}	g^1_{19}	g^1_{18}	g^1_{41}	g^1_{40}	g^1_{39}	g^1_{38}	g^1_{50}	g^1_{49}	g^1_{48}	g^1_{47}	g^1_{46}	g^1_{57}	g^1_{56}	g^1_{55}	g^1_{54}	g^1_{53}	g^1_{52}	g^1_{58}	g^1_{61}	g^1_{60}	g^1_{59}	g^1_{58}	g^1_{57}	g^1_{56}	g^1_{65}	g^1_{64}	g^1_{61}	. . .				

§ 7. — *Genere negativo. Costruzione delle curve di genere massimo.*

1. Il genere della curva qui lo abbiamo considerato semplicemente come differenza $\pi - d$, e questa rimane inalterata per trasformazioni biunivoche; ma essa è una delle tante differenze che rimangono inalterate per *adatte* trasformazioni.

La prima differenza di questa natura si presentò a RIEMANN e fu quella che chiamò *ordine di connessione* della superficie da lui ideata; ed era la differenza $\mu - \nu$ fra il numero μ dei tagli, che eseguiti su una superficie molteplicemente connessa la spezza in ν parti semplicemente connesse [1]), ed il numero ν stesso.

Un'altra differenza importante fu quella, che gli risultò in seguito costante, fra il numero w dei punti di *diramazione* di una funzione algebrica e il doppio del grado della funzione [2]).

Una differenza altrettanto interessante è quella che qui abbiamo notata $N_z - R_z$, ed altre se ne potranno presentare ancora, quando si tenga conto adatto della qualità delle trasformazioni in cui essa si considera.

Intanto osserviamo che anche la differenza $\pi - d$, cioè l'attuale genere, può considerarsi negativa, perchè essa ha pure il suo significato, in quanto che il numero dei punti doppi può crescere oltre il massimo trovato per curve irreducibili. Così la conica che si spezza in due rette ha un punto doppio, genere -1; la cubica che si spezza in una conica e una retta ha 2 punti doppi, genere -1; e se si spezza in 3 rette ha 3 punti doppi, genere -2.

In generale una curva di m^{mo} ordine che si spezza in m rette ha $\frac{m(m-1)}{2}$ punti doppi, quindi il suo genere è dato da

$$\frac{(m-1)(m-2)}{2} - \frac{m(m-1)}{2} = -(m-1)$$

numero negativo $-(m-1)$.

2. Ritornando alle curve di genere massimo C_π^m vogliamo ricordare alcune proprietà già trovate precedentemente, che danno la possibilità di costruirle direttamente.

Nella Memoria 7 (teor. 2, *a*) e nella Memoria 8 (teor. n. 2) fu dimostrato:

Su ogni curva C_π^m, ogni curva C^{m-1} del piano, che passa per un gruppo G_{m-1} di $m-1$ punti per diritto con un punto O della curva, sega ulteriormente

[1]) RIEMANN, § 6 della sua 1.ª memoria.

[2]) RIEMANN, § 7 della sua 2.ª memoria, questa si tradusse in seguito in differenza fra i punti doppi di una serie g^1_n e il doppio del suo ordine.

mente la C_π^m in altri $(m-1)^2$ punti, che sono punti base di un fascio di curve C^{m-1}, che sega sulla C_π^m la g_{m-1}^1 individuata dal punto O.

Questo teorema generalizzava il teorema noto per le curve del terzo ordine:

Ogni conica di un fascio, di cui i quattro punti base sono situati sopra una cubica, taglia questa curva in due punti mobili di cui la congiungente passa per un punto fisso della curva (che si è detto da Salmon **punto opposto** *ai quattro punti base)* [1].

Perciò si può per ogni curva C_π^m dire che ai punti base di quel fascio di C^{m-1} corrisponde sulla curva un *punto opposto O*. Da questi si dedussero varii corollarii.

3. Inoltre nel teor. 2, *c* della stessa Memoria 7 si dimostrò:

Ogni curva C_π^m, generale nel suo ordine, è segata da una qualunque C_π^m che passi per il gruppo G_{m-1} di $m-1$ punti per diritto con un punto O della prima, in altri $m^2-(m-1)=m(m-1)+1$ punti che costituiscono i punti base di una rete di curve C_π^m, ciascuna delle quali è segata dalle rimanenti in gruppi di $m-1$ punti per diritto con il punto O.

Da questo teorema (sorpassando su i numerosi corollarii ricavati in armonia coi teoremi di Cayley e di Jacobi), si ricavava, nel n. 2, *h*, la seguente costruzione delle curve C_π^m di genere massimo:

Le curve C_π^m sono generate dalle intersezioni di un fascio di raggi di 1.° ordine di centro O con un fascio (ad esso riferito proiettivamente) di curve di ordine $m-1$ a punti base semplici, nessuno dei quali deve coincidere col centro O del fascio di 1.° ordine.

§ 8. — *Relazione fra le dimensioni di tre sistemi di curve tutte aggiunte o non.*

1. Due sistemi di curve agg. sono *complementari* l'un dell'altro rispetto al sistema il cui ordine è somma degli ordini dei due primi.

Così i sistemi delle C^{m-4} e C^1, C^{m-5} e C^2, C^{m-6} e C^3 aggiunte sono fra loro complementari rispetto al sistema delle C^{m-3} aggiunte; i sistemi delle C^1 e $C^{m-3-\alpha+1}$, C^2 e $C^{m-3-(\alpha+2}$, ecc. sono complementari rispetto al sistema delle $C^{m-3-\alpha}$ agg.

Vogliamo ora determinare quale relazione esista fra le dimensioni di tre sistemi di curve agg., di cui uno sia di grado eguale alla somma dei gradi degli altri due limitandoci, come sempre, ai sistemi di curve agg. di ordine $< m$.

[1]) Clebsch-Lindemann. *Leçons sur la Géométrie*, trad. francese, v. 2 p. 269.

2. Indichiamo con C^{β}, C^{γ}, $C^{\beta+\gamma}$ i tre sistemi di curve aggiunte alle C_p^m e siano q, r, s le dimensioni dei sistemi di queste curve.

Esaminiamo dapprima il problema relativamente alla curva C_π^m di genere massimo. Le curve C^{β}, C^{γ}, $C^{\beta+\gamma}$ sono curve non sottoposte ad alcuna condizione, quindi: $q = \frac{\beta(\beta+3)}{2}$, $r = \frac{\gamma(\gamma+3)}{2}$, $s = \frac{(\beta+\gamma)(\beta+\gamma+3)}{2}$ ed allora

$$s - (q+r) = \frac{1}{2}\left[(\beta+\gamma)^2 + 3(\beta+\gamma) - \beta^2 - \gamma^2 - 3\beta - 3\gamma\right] = \beta\gamma$$

ovvero

$$q + r = s - \beta\gamma$$

Così p. es. nella C_{36}^{10} i sistemi C^2, C^5, C^7 danno $5 + 20 = 35 - 10$; i sistemi C^2, C^3, C^5 danno $5 + 9 = 20 - 6$.

3. Passiamo ora dalla curva C_π^m ad una qualunque curva C_p^m. Gli ordini q, r, s diminuiscono, in questo passaggio, di tante unità per quanti punti doppi ha la C_p^m, cioè d, e quindi chiamando q', r', s' in nuovi ordini

$$s' - (q' + r') = \beta\gamma + d$$

da cui

$$q' + r' = s' - \beta\gamma - d$$

Per es. nella C_{33}^{10} con 3 p. d. non allineati, i sistemi di curve aggiunte C^2, C^4, C^5 segano le serie

$$g_{14}^{2}\ ,\ g_{34}^{11}\ ,\ g_{34}^{24}$$

e si ha

$$2 + 11 = 24 - 8 - 3$$

Così possiamo enunciare:

Teor. 1.° *Allorquando fra i sistemi di curve agg. ad una curva C_p^m, limitati come sopradetto, si considerano i sistemi di ordini β, γ, $\beta+\gamma$, se le dimensioni delle serie complete da queste segate son q, r, s, e d è il numero dei punti doppi della C_p^m si ha*

$$s - (q + r) = \beta\gamma + d.$$

Notiamo che questa relazione più generale è di primo grado rispetto

ad s, q, r, e permette di trovare uno di questi valori sotto forma intera quando sono noti gli altri due e che essa vale per tutti i sistemi di curve aggiunte di ordine $< m$.

4. Se invece supponiamo che dei due sistemi di curve C^β, C^γ, l'uno C^β sia di curve agg., l'altro C^γ di curve generiche del piano; le dimensioni q ed s delle curve agg. diminuiscono nel passaggio da C^m_π a C^m_p di tante unità quanto sono i punti doppi d di C^m_p (nella ipotesi fatta di posizioni indipendenti) mentre la dimensione r resta inalterata quindi la differenza

$$s - (q + r)$$

resta qual'era per le curve C^m_π e da ciò:

Teor. 2.° *Allorquando si considera il sistema delle curve aggiunte alla* C^m_p *di grado* $< m$, *e che sia somma di quello di un sistema di curve agg. e di un sistema di curve generiche del piano, la differenza* $s - (q + r) = \beta\gamma$, *come per le* C^m_π.

In questo caso le serie segate dalle C^β e dalle C^γ sono *residue* fra loro per rispetto alla serie segata dalle $C^{\beta+\gamma}$ agg.; quindi il teor. 2.° suddetto presenta, per le curve C^m_p, un'altra forma del teorema di Riemann-Roch, col vantaggio che mentre quello di Riemann-Roch si applica soltanto alle serie residue rispetto alle curve aggiunte dell'ordine $m-3$, questo teorema 2.° si applica a qualunque sistema di curve aggiunte di ordine $\beta+\gamma$, minore di m.

5. L'enunciato del teorema 2.° può avere anche una seconda interpretazione, cioè si può estendere a due sistemi di curve *non* agg., ma residui l'uno dell'altro rispetto ad un dato sistema di curve agg.

Mi spiegherò con esempi. Consideriamo le curve con due punti doppi: C^6_5 C^7_{13} C^8_{19} ecc. Si possono considerare le rette che in ciascuno di esse passano per uno solo dei punti doppi. Queste formano un fascio che sega sulla curva C^m una g^1_{m-2}, e quindi si hanno 2 g^1_{m-2} che costituiscono, prese insieme, una serie parziale contenuta nella g^3_{2m-4} completa segata da tutte le coniche agg. In questo caso $q = 1$, $r = 1$, $s = 3$ e si ha

$$3 - (1 + 1) = 1 = \beta\gamma.$$

Se invece consideriamo la retta che passa per i 2 punti doppi, (C^1 agg. che sega g^0_{m-4}); questa con una qualunque retta del piano costituisce una C^2 agg. e tutte segano una serie parziale g^2_{2m-4} contenuta nella serie g^3_{2m-4}

delle C^3 agg. E si ha $q = 0$, $r = 2$, $s = 3$

$$3 - (0 + 2) = 1 = \beta\gamma.$$

Passiamo alle C^m con 3 p. d. non per diritto. Per esempio: C^6_7 , C^7_{12}, C^8_{18} ecc. I tre punti doppi determinano delle C^2 agg. che segano una g^2_{2m-6} completa. Per le coniche che si spezzano in una retta fissa che passa per 2 p. d. e una mobile che passa per l'altro punto doppio, si hanno una g^0_{m-4} e una g^1_{m-2} residue l'una dell'altra rispetto alle g^2_{2m-6} e per esse

$$2 - (0 + 1) = 1 = \beta\gamma.$$

Passiamo alle C^m che hanno 4 p. d. $ABCD$ di cui 3 non allineati; le coniche agg. segano una g^4_{2m-8} .

Se supponiamo che la conica si spezzi in due rette AB, CD ognuna di questa sega una g^0_{m-4} ed esse sono residue l'una dell'altra e quindi

$$1 - (0 + 0) = 1 = \beta\gamma.$$

Ma le due serie parziali possono considerarsi residue fra loro rispetto ad una serie segata da curve agg. di ordine più elevato.

Così per la C^m con 3 p. d. (non per diritto), la cubica agg. (se $m > 3$) si può spezzare in una retta che passa per uno di essi, e una conica che passa per gli altri due, la prima sega una g^1_{m-2}, la seconda una g^3_{2m-4} , mentre le cubiche agg. segano la serie completa g^6_{3m-6} e si ha pure

$$6 - (1 + 3) = 2 = \beta\gamma.$$

Oppure si può spezzare in una retta fissa che passa per 2 p. d. e una conica che passa per il rimanente p. doppio e queste segano una g^0_{m-4} e una g^4_{2m-2} , e si ha

$$6 - (0 + 4) = 2 = \beta\gamma.$$

E così si può considerare che sulle C^m con 4 punti doppi, le cubiche aggiunte segano una g^5_{3m-8}, e se si spezzano in una retta mobile intorno ad una dei p. doppi e una conica che passa per i rimanenti, che segano rispettivamente una g^1_{m-2} e g^2_{2m-6} si ha

$$5 - (1 + 2) = 2 = \beta\gamma$$

e così seguitando si può passare a curve con 5 p. d. o più, oppure a curve agg. di ordine più elevato.

Quale è la ragione che fa restare integro il teorema 2.°

Le curve parziali C^{β}, C^{γ} in cui si spezza la curva agg. di ordine $\beta+\gamma$ passano per tutti i punti doppi semplicemente, e nel complesso assorbono tante unità quante ne assorbe la curva $C^{\beta+\gamma}$, pel numero dei punti doppi posseduti dalla curva; quindi la differenza $s-(q+r)$ resta inalteratamente eguale a $\beta\gamma$.

Se si applica il teorema di Riemann-Roch ai casi innanzi specificati si trova che non soddisfa; ma se lo si applica ai casi in cui la $C^{\beta+\gamma}$ è una curva agg. di ordine $m-3$, si trova che è applicabile, come sarebbe per la curva C_4^5 per gli esempi di due punti doppi, la C_3^5 per 3 p. d. e la conica aggiunta, la C_7^6 e la C_6^6 per 4 p. d. Dunque il teorema 2.° comprende come caso particolare il teorema di Riemann-Roch per il caso che la $C^{\beta+\gamma}$ sia una C^{m-3} agg., mentre esso si estende a tutti i sistemi di curve aggiunte alla C_p^m. Dippiù a questo teorema semplicissimo si arriva senza bisogno di integrali abeliani, nè di altra alta teoria analitica.

Su questo argomento ritorneremo in una seguente prossima Nota.

6. Poichè nella formola del teor. 1.° appare il numero d dei punti doppi, vogliamo esaminare quali variazioni si hanno fra le caratteristiche delle serie segate da tutte le curve agg. nelle curve di ordini differenti allorquando resta inalterato il numero d.

Prendiamo a considerare a mo d'esempio le curve con 3 punti doppi C_7^6, C_{12}^7, C_{18}^8 e mettiamo in colonna le serie segate dalle curve aggiunte dello stesso ordine.

					C^2	C^3	C^4	C^5	C^6	C^7	(aggiunte)
curva fondam.	C_7^6	serie	segate		g_6^2	g_{12}^6	g_{18}^{14}	g_{24}^{17}			
» »	C_{12}^7	»	»		g_8^2	g_{15}^6	g_{22}^{12}	g_{29}^{17}	g_{36}^{24}		
» »	C_{18}^8	»	»		g_{10}^2	g_{18}^6	g_{26}^{11}	g_{34}^{17}	g_{42}^{24}	g_{50}^{31}	

Cominciando dalle curve agg. di grado minore si vede che le dimensioni delle serie da esse segate si succedono senza variazione, mentre gli ordini aumentano nelle successive colonne di 2, di 3, di 4, di 5 ecc. unità; cosicchè il comportamento delle g_6^2 delle C^2 agg. rispetto alle C^{m-3} agg. nella C_7^6 è identico a quello delle C^2 agg. rispetto alle C^{m-4} agg. nella C_{12}^7, e delle C^2 agg. rispetto alle C^{m-5} agg. della C_{18}^8 e così seguitando. Sicchè non vi sono sostanziali diversità di proprietà fra le successive curve agg. indipendentemente dal valore di α; tutte si comportano allo stesso modo con le precedenti a cominciare da quelle di ordine minimo.

Le differenze $N - R$ sono per le singole curve

$$\begin{matrix} 4\ ,\ 6\ ,\ 7\ ,\ 7 \\ 6\ \ 9\ \ 11\ \ 12\ ,\ 12 \\ 8\ ,\ 12\ ,\ 15\ ,\ 17\ ,\ 18\ ,\ 18 \end{matrix}$$

con aumenti rispettivi di 2. 3. 4. 5... unità per colonna da una orizzontale all'altra.

§ 9. — *Estensione del precedente teorema a 4 sistemi di curve tutte aggiunte o non.*

1. Il teorema 1.° del § 8 si può anche estendere da tre sistemi a quattro sistemi di curve, di cui uno sia di ordine somma degli altri tre.

Siano β, γ, δ gli ordini dei primi e $\beta + \gamma + \delta$ l'ordine dell'ultimo, come sempre minore di m, e consideriamo il caso che la curva C_π^m sia di genere massimo. Siano q, r, t le dimensioni dei sistemi delle prime e s quella dell'ultimo, sarà

$$s - (q + r + t) = \frac{1}{2}\left[(\beta + \gamma + \delta)^2 + 3(\beta + \gamma + \delta)\right] - \frac{1}{2}\left[\beta^2 + 3\beta + \gamma^2 + 3\gamma + t^2 + 3t\right]$$
$$\frac{1}{2}\left[2\beta\gamma + 2\beta\delta + 2\gamma\delta\right]$$
$$= \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta.$$

Passando dalla curva C_π^m alla curva $C_{\pi-1}^m$, le dimensioni s, q, r, t perdono ciascuno una unità; e passando alle curve $C_{\pi-d}^m$, perdono ciascuno d unità, quindi per una curva C_p^m con d punti doppi

$$s - (q + r + t) = \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta + d$$

Qualora uno dei sistemi (p. es. q) non sia di curve agg. si ha

$$s - (q + r + t) = \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta + d$$

e qualora due non siano di curve aggiunte

$$s - (q + r + t) = \beta\varphi + \beta\delta + \gamma\delta$$

Ciò possiamo confermare con esempi:

Consideriamo le curve $C_{\pi-3}^m$ con 3 p. d. non per diritto, le rette che passano per ciascuno di essi danno 3 g_{m-2}^1 che costituiscono una serie par-

ziale contenuta nella g^{5}_{3m-6} segata dalle cubiche agg. e si ha

$$6-(1+1+1)=3=1+1+1=\beta\gamma+\gamma\delta+\beta\delta.$$

Potrebbero considerarsi due rette passanti ciascuna per 1 p. d. e le coniche che passano pel 3.° punto doppio; queste segano rispettivamente g^{1}_{m-2} g^{1}_{m-2} g^{1}_{2m-6}, mentre le quartiche agg. segano g^{11}_{4m-6}, e si ha

$$11-(1+1+4)=5=1+2+2$$

Potrebbero considerarsi le curve $C^{m}_{\pi-5}$ con 4 p. d. e le quartiche ad esse agg. che segano una g^{10}_{4m-8}, se queste si spezzano in due rette ciascuna per un p. d. e una conica per gli altri due si hanno 2 g^{1}_{m-2} e una g^{8}_{2m-4} e si ha

$$10-(1+1+3)=5=1+2+2.$$

Se consideriamo la curve $C^{m}_{\pi-6}$ con 6 p. d. (non appartenenti ad una conica) le coniche che passano che ogni coppie di p. d. segano rispettivamente un g^{3}_{2m-6} mentre la C^{6} agg. segano una g^{21}_{6m-6}, e si ha

$$21-(3+3+3)=12=4+4+4.$$

Possiamo dunque enunciare in generale:

Allorquando fra i sistemi di curve aggiunte ad una generale C^{m}_{p} si considerano quattro sistemi di curve C^{β}, C^{γ}, C^{δ}, $C^{\beta+\gamma+\delta}$, *di cui le dimensioni siano* q, r, t, s, (*ed* $s<m$) *e sia* d *il numero dei punti doppi della* C^{m} *si ha*

1.° $$s-(q+r+t)=\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta+2d$$

se i sistemi di C^{β}, C^{γ}, C^{δ} *sono tutti di curve aggiunte*;

2.° $$s-(q+r+t)=\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta+d$$

se i sistemi di C^{β}, C^{γ}, C^{δ} *due sono di curve aggiunte e uno di curve generiche del piano*;

3.° $$s-(q+r+t)=\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta$$

se dei sistemi di C^{β}, C^{γ}, C^{δ} *uno soltanto è formato di curve aggiunte.*

Napoli, Novembre 1938 (XVII).

Sulle algebre complesse commutative irriducibili del 4.° ordine dotate di modulo.

Nota della dott. **Clelia Guarnaccia,** *presentata dal socio* **G. Scorza**

(Adunanza del dì 5 gennaio 1939 - XVII)

Sunto. — Dimostrazione della validità del teorema fondamentale per le algebre complesse commutative irriducibili del 4.° ordine dotate di modulo. Determinazione della particolare forma assunta in queste algebre di una generica serie di potenze e, in particolare, delle serie: sen x, cos x ed e^x.

Il prof. Nicolò Spampinato, in una nota ai Lincei [1]) in seguito a dei risultati già conseguiti relativi alle algebre complesse commutative del 2.° e del 3.° ordine, ha osservato che si poteva prevedere la validità del seguente teorema:

« Un'equazione algebrica di grado n in un'algebra complessa commutativa ammette, nel caso generico, n radici distinte se l'algebra è irriducibile, n^s radici distinte se l'algebra è somma diretta di s algebre irriducibili ».

Nella seguente nota mi propongo di dimostrare che il teorema enunciato è vero per il caso successivo delle algebre complesse commutative irriducibili del 4.° ordine dotate di modulo. Com'è noto, la parte del teorema relativa alle algebre riducibili è conseguenza della validità del teorema per le algebre irriducibili; sicchè io mi occupo solo del caso irriducibile.

Tenendo conto che per la dimostrazione del teorema ho dovuto determinare la particolare forma che assumono le serie di potenze nelle quattro algebre complesse commutative irriducibili del 4.° ordine, colgo l'occasione per determinare la particolare forma che assumono in queste algebre le serie di potenze rappresentanti le funzioni: sen x, cos x ed e^x.

§ 1. — *Particolare espressione delle serie di potenze in ciascuna algebra complessa commutativa irriducibile del 4.° ordine dotata di modulo.*

1. È noto [1]) che esistono 4 algebre complesse commutative irriducibili del 4.° ordine dotate di modulo. Esse sono caratterizzate rispettivamente dalle seguenti tabelle di moltiplicazione:

---

[1]) N. Spampinato, *Sulle funzioni di una variabile in una delle quattro algebre complesse commutative del 3.° ordine.* Rend. R. Acc. dei Lincei, vol. XXVI, serie 6.ª, 2.° semestre, fasc. 1-2, 1937.

	u_1	u_2	u_3	u_4
u_1	u_1	u_2	u_3	u_4
u_2	u_2	0	0	0
u_3	u_3	0	0	0
u_4	u_4	0	0	0

I

	u_1	u_2	u_3	u_4
u_1	u_1	u_2	u_3	u_4
u_2	u_2	u_3	0	0
u_3	u_3	0	0	0
u_4	u_4	0	0	0

II

	u_1	u_2	u_3	u_4
u_1	u_1	u_2	u_3	u_4
u_2	u_2	u_3	0	0
u_3	u_3	0	u_4	0
u_4	u_4	0	0	0

III

	u_1	u_2	u_3	u_4
u_1	u_1	u_2	u_3	u_4
u_2	u_2	u_3	u_4	0
u_3	u_3	u_4	0	0
u_4	u_4	0	0	0

IV

In questo numero ci si propone di trovare la forma che assume in ciascuna di queste 4 algebre, la serie di potenze:

$$\sum_0^\infty A_n x^n \tag{1}$$

essendo A_n ed x due elementi dell'algebra.

Per la prima algebra, detta anche dei numeri quadriduali, posto:

$$x = x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 + x_4 u_4 \tag{2}$$

si trova facilmente:

$$x^n = x_1^n u_1 + n x_1^{n-1} x_2 u_2 + n x_1^{n-1} x_3 u_3 + n x_1^{n-1} x_4 u_4 . \tag{3}$$

Posto inoltre:

$$A_n = a_n u_1 + b_n u_2 + c_n u_3 + d_n u_4 \tag{4}$$

si ha:

$$\sum_0^\infty A_n x^n = \left[\sum_0^\infty a_n x_1^n\right] u_1 + \left[\sum_0^\infty a_n x_1^{n-1} x_2 + \sum_0^\infty b_n x_1^n\right] u_2 + \tag{5}$$

$$+ \left[\sum_0^\infty a_n x_1^{n-1} x_3 + \sum_0^\infty c_n x_1^n\right] u_3 + \left[\sum_0^\infty a_n x_1^{n-1} x_4 + \sum_0^\infty d_n x_1^n\right] u_4 .$$

E ponendo:

$$\sum_0^\infty a_n x_1^n = F(x_1) \; ; \; \sum_0^\infty b_n x_1^n = G(x_1) \; ; \; \sum_0^\infty c_n x_1^n = H(x_1) \; ; \; \sum_0^\infty d_n x_1^n = M(x_1) \tag{6}$$

si ha:

$$(A) \quad \sum_0^\infty A_n x^n = F(x_1) u_1 + \left\{F'(x_1) x_2 + G(x_1)\right\} u_2 + \left\{F'(x_1) x_3 + H(x_1)\right\} u_3 + \\ + \left\{F'(x_1) x_4 + M(x_1)\right\} u_4 .$$

Nel caso della seconda algebra indicando ancora con x ed A_n due elementi di essa dati rispettivamente dalle (2) e (4) si trova:

$$(7)\quad x^n = x_1^n u_1 + n x_1^{n-1} x_2 u_2 + \left\{ n x_1^{n-1} x_3 + \left(\begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix}\right) x_1^{n-2} x_2^2 + n x_1^{n-1} x_2 \right\} u_3$$

e quindi:

$$\sum_0^\infty A_n x^n = \sum_0^\infty a_n x_1^n u_1 + \left\{ \sum_0^\infty n a_n x_1^{n-1} x_2 + \sum_0^\infty b_n x_1^n \right\} u_2 + \left\{ \sum_0^\infty n a_n x_1^{n-1} x_3 + \sum_0^\infty c_n x_1^n \right\} u_3 +$$

$$+ \left\{ \sum_0^\infty \left(\begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix}\right) a_n x_1^{n-2} x_2^2 + \sum_0^\infty n a_n x_1^{n-1} x_3 + \sum_0^\infty n b_n x_1^{n-1} x_2 + \sum_0^\infty d_n x_1^n \right\} u_4 +$$

da cui, conservando le posizioni (6):

$$(8)\quad \sum_0^\infty A_n x^n = F(x_1) u_1 + \left\{ F'(x_1) x_2 + G(x_1) \right\} u_2 + \left\{ F'(x_1) x_3 + H(x_1) \right\} u_3 +$$

$$+ \left\{ \frac{1}{2} F''(x_1) x_2^2 + G'(x_1) x_2 + F'(x_1) x_4 + M(x_1) \right\} u_4 .$$

Nel caso della terza algebra si ha:

$$x^n = x_1^n u_1 + n x_1^{n-1} x_2 u_2 + n x_1^{n-1} x_3 u_3 + \left\{ n x_1^{n-1} x_4 + \left(\begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix}\right) x_1^{n-2} x_2^2 + \left(\begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix}\right) x_1^{n-2} x_3^2 \right\} u_4$$

e quindi:

$$\sum_0^\infty A_n x^n = \sum_0^\infty a_n x_1^n u_1 + \left[\sum_0^\infty n a_n x_1^{n-1} x_2 + \sum_0^\infty b_n x_1^n \right] u_2 +$$

$$+ \left[\sum_0^\infty n a_n x_1^{n-1} x_3 + \sum_0^\infty c_n x_1^n \right] u_3 + \left[\sum_0^\infty n a_n x_1^{n-1} x_4 + \sum_0^\infty \left(\begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix}\right) a_n x_1^{n-2} x_2^2 + \right.$$

$$\left. + \sum_0^\infty \left(\begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix}\right) a_n x_1^{n-2} x_3^2 + \sum_0^\infty n b_n x_1^{n-1} x_2 + \sum_0^\infty n c_n x_1^{n-1} x_3 + \sum_0^\infty d_n x_1^n \right] u_4$$

e per le (6):

$$(9)\quad \sum_0^\infty A_n x^n = F(x_1) u_1 + \left\{ F'(x_1) x_2 + G(x_1) \right\} u_2 + \left\{ F'(x_1) x_3 + H(x_1) \right\} u_3 +$$

$$+ \left\{ F'(x_1) x_4 + \frac{1}{2} F''(x_1) x_2^2 + \frac{1}{2} F''(x_1) x_3^2 + G'(x_1) x_3 + H'(x_1) x_2 + M(x_1) \right\} u_4$$

Nel caso della quarta algebra (numeri quadripotenziali) si trova:

$$x^n = x_1^n u_1 + n x_1^{n-1} x_2 u_2 + \left[n x_1^{n-1} x_3 + \binom{n}{2} x_1^{n-2} x_2^2 \right] u_3 +$$
$$+ \left[n x_1^{n-1} x_4 + n(n-1) x_1^{n-2} x_2 x_3 + \binom{n}{3} x_1^{n-3} x_2^3 \right] u_4$$

e quindi:

$$\sum_0^\infty {}_n A_n x^n = \sum_0^\infty a_n x_1^n u_1 + \left[\sum_0^\infty n a_n x_1^{n-1} x_2 + \sum_0^\infty b_n x_1^n \right] u_2 + \left[\sum_0^\infty n a_n x_1^{n-1} x_3 + \right.$$
$$\left. + \sum_0^\infty \frac{1}{2} n(n-1) a_n x_1^{n-2} x_2^2 + \sum_0^\infty n b_n x_1^{n-1} x_2 + \sum_0^\infty c_n x_1^n \right] u_3 + \left[\sum n a_n x_1^{n-1} x_4 + \right.$$
$$\sum_0^\infty n(n-1) a_n x_1^{n-2} x_2 x_3 + \sum_0^\infty \binom{n}{3} x_1^{n-3} x_2^3 + \sum_0^\infty n b_n x_1^{n-1} x_3 +$$
$$+ \sum_0^\infty \binom{n}{2} b_n x_1^{n-2} x_2^2 + \sum n c_n x_1^{n-1} x_2 + \sum d_n x_1^n \Big] u_4 .$$

E per le (6):

$$(D) \quad \sum_0^\infty {}_n A_n x^n = F(x_1) u_1 + \left\{ F'(x_1) x_2 + G(x_1) \right\} u_2 + \left\{ F'(x_1) x_3 + \frac{1}{2} F''(x_1) x_2^2 + \right.$$
$$\left. + G'(x_1) x_2 + H(x_1) \right\} u_3 + \left\{ F'(x_1) x_4 + F''(x_1) x_2 x_3 + \frac{1}{6} F'''(x_1) x_2^3 + \right.$$
$$\left. + G'(x_1) x_3 + \frac{1}{2} G''(x_1) x_2^2 + H'(x_1) x_2 + M(x_1) \right\} u_4 .$$

Le (A), (B), (C), (D) trovate danno quindi le diverse espressioni di una generica serie di potenze nelle 4 algebre complesse commutative irriducibili del 4.° ordine dotate di modulo.

§ 2. — *Il teorema fondamentale per le algebre irriducibili commutative del 4.° ordine dotate di modulo.*

Se nelle espressioni (A), (B), (C), (D) trovate precedentemente l'indice n si fa variare da o ad n e si uguaglia a zero l'espressione ottenuta si otterrà la forma che una generica equazione di grado n assume in ciascuna delle 4 algebre sopradette.

Per risolvere quindi una tale equazione basterà risolvere il sistema di

quattro equazioni, nelle 4 incognite $x_1\ x_2\ x_3\ x_4$ ottenuto eguagliando a zero i coefficienti delle 4 unità.

Ora, dalle espressioni trovate risulta che il coefficiente della u_1 è sempre un polinomio di grado n in x_1 e che il coefficiente di ciascuna u_i (per $i \equiv 2, 3, 4$) è una espressione di 1.° grado in x_i e nella quale figurano tutte o in parte le $x_1\ x_2 \dots x_{i-1}$.

Il sistema suddetto potrà quindi risolversi ogni volta con metodo ricorrente. È inoltre utile osservare che ad ogni radice semplice x_1^* della prima equazione:

$$F(x_1) = 0$$

corrisponde sempre (essendo in tal caso $F'(x_1^*) \neq 0$) una soluzione semplice del sistema e quindi una radice semplice della equazione di partenza.

Ma, essendo la $F(x_1)$ di grado n, essa nel caso generico, ammetterà n radici semplici ed in corrispondenza si avranno n radici semplici per la equazione data. Si potrà quindi concludere che *per tutte le algebre commutative irriducibili del 4.° ordine dotate di modulo una equazione generica algebrica di grado n ammette in generale n radici semplici.*

Vale quindi per queste algebre il teorema fondamentale.

§ 3. — *Campo di convergenza di una generica serie di potenze in ciascuna delle 4 algebre complesse commutative irriducibili del 4.° ordine dotate di modulo.*

Si consideri la serie di potenze:

$$\sum_{0}^{\infty}{}_{n} A_n x^n$$

e le forme diverse (A), (B), (C), (D) che essa prende in ciascuna delle 4 algebre sopra dette.

Si rappresenti la variabile:

$$x = x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 + x_4 u_4$$

nell'S_8 reale e si indichino con $x'_1\ x''_1\ x'_2\ x''_2\ x'_3\ x''_3\ x'_4\ x''_4$ gli assi coordinati uscenti dall'origine O.

Se quindi si pone:

$$x_i = x'_i + x''_i\, i \qquad (i \equiv 1, 2, 3, 4)$$

l'elemento x dell'algebra verrà rappresentato nel punto: $X \equiv (x'_1 x''_1 \dots x'_4 x''_4)$ dell'S_8 reale rappresentativo.

Si assuma come piano di Gauss il piano coordinato ρ_1 degli assi x'_1 e x''_1 e si rappresenti in esso la variabile:

$$x_1 = x'_1 + x''_1 i$$

considerando come immagine di essa il punto $X_1 \equiv (x'_1\ x''_1)$ di ρ_1.

Sia π_1 l'S_5 improprio dell'S_6 congiungente gli assi $x'_2\ x''_2\ x'_3\ x''_3\ x'_4\ x''_4$, proiettando questo dal punto $X \equiv (x'_1\ x''_1 \ldots x'_4\ x''_4)$ si avrà un S_6 parallelo all'S_6 considerato e che incontrerà il piano ρ_1 in un punto che avrà nulle tutte le coordinate eccetto le prime due che saranno x'_1 e x''_1; tale punto sarà quindi il punto X_1 sopra detto.

Proiettando quindi sul piano ρ_1 il punto X immagine della variabile x dall'S_5 improprio π_1 si ottiene l'immagine X_1 della prima coordinata complessa x_1 di x.

Analogamente indicando con ρ_2, ρ_3 e ρ_4 rispettivamente i piani congiungenti gli assi: x'_2, x''_2; x'_3, x''_3; x'_4, x''_4; in essi si potranno rappresentare rispettivamente le variabili x_2, x_3 e x_4, assumendo come immagini di esse i punti $X_2 \equiv (0\ 0\ x'_2\ x''_2\ 0\ 0\ 0\ 0)$, $X_3 \equiv (0\ 0\ 0\ 0\ x'_3\ x''_3\ 0\ 0)$ e $X_4 \equiv (0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ x'_4\ x''_4)$ che si potranno considerare come ottenuti proiettando il punto X dall'S_5 improprio dell'S_6 congiungente rispettivamente gli assi: $(x'_1\ x''_1\ x'_3\ x''_3\ x'_4\ x''_4)$; $(x'_1\ x''_1\ x'_2\ x''_2\ x'_4\ x''_4)$: $(x'_1\ x''_1\ x'_2\ x''_2\ x'_3\ x''_3)$ sui piani ρ_2, ρ_3 e ρ_4.

Si potrà quindi affermare che per ciascuna delle 4 algebre in questione:

« *Condizione necessaria e sufficiente affinchè la serie di potenze:*

$$(1) \qquad \sum_0^\infty A_n x^n$$

sia definita nel punto X è che le 4 serie ordinarie di potenze:

$$(2) \quad F(x_1) = \sum_0^\infty a_n x_1^n\ ,\ G(x_1) = \sum_0^\infty b_n x_1^n\ ,\ H(x_1) = \sum_0^\infty c_n x_1^n\ ,\ M(x_1) = \sum_0^\infty d_n x_1^n$$

siano convergenti nel punto X_1 immagine della variabile x_1 ed è quindi necessario che detto punto sia interno al più piccolo dei 4 cerchi di convergenza delle serie (2) *di centro O e posti nel piano ρ_1* ».

Ora, chiamando *monocilindro* l'insieme dei punti dell'S_8 che gode della proprietà di essere proiettato in un cerchio del piano ρ_1 dall'S_5 improprio, si potrà affermare che:

« *La serie di potenze data è definita nei punti interni al monocilindro che viene proiettato su ρ_1 dall'S_5 improprio nel più piccolo dei 4 cerchi di convergenza delle serie* (2) *nell'argomento x_1* »

Ciò che si è detto relativamente alla serie (1) si può ripetere per la serie:

$$(1') \qquad \sum_{0}^{\infty}{}_{n} A_n (x - x')^n$$

nell'argomento $x - x'$.

Anche in questo caso, posto:

$$x' = x_1' u_1 + x_2' u_2 + x_3' u_3 + x_4' u_4$$

sul piano ρ_1 si avranno i 4 cerchi di convergenza delle 4 serie:

$$(2') \qquad \sum_{0}^{\infty} a_n (x_1 - x_1')^n \; ; \; \sum_{0}^{\infty} b_n (x_1 - x_1')^n \; ; \; \sum_{0}^{\infty} c_n (x_1 - x_1')^n \; ; \; \sum_{0}^{\infty}{}_{n} d_n (x_1 - x_1')^n$$

aventi tutti il centro nel punto X_1' immagine del numero complesso x_1'.

Anche qui si potrà concludere che:

« *L'insieme dei punti X dell'* S_8 *reale rappresentativo per i quali la serie* (1') *risulta convergente è un monocilindro che viene proiettato dall'* S_3 *improprio nel più piccolo dei 4 cerchi di convergenza delle serie* (2') *posti in* ρ_1 *ed aventi il centro nel punto* X_1'.

Il punto X' immagine del punto x' si dirà *centro* del monocilindro, perchè la sua proiezione da π_1 su ρ_1 è il centro X_1' del cerchio proiezione da π_1 del monocilindro sul piano ρ_1.

§ 4. — *Sviluppi in serie delle funzioni:* $\operatorname{sen} x$, $\cos x$ *ed* e^x *in ciascuna delle 4 algebre complesse commutative irriducibili del 4.° ordine dotate di modulo.*

È noto che si ha:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 - \frac{1}{7!} x^7 + \dots$$

$$\cos x = u_1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots$$

$$e^x = u_1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Nel caso della prima algebra, applicando la espressione (3) del (*n*. 1) raccogliendo si ha:

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x_1 u_1 + x_2 \cos x_1 u_2 + x_3 \cos x_1 u_3 + x_4 \cos x_1 u_4$$

$$\cos x = \cos x_1 u_1 - x_2 \operatorname{sen} x_1 u_2 - x_3 \operatorname{sen} x_1 u_3 - x_4 \operatorname{sen} x_1 u_4$$

$$e^x = x_1 e^{x_1} u_1 + x_2 e^{x_1} u_2 + x_3 e^{x_1} u_3 + x_4 e^{x_1} u_4.$$

Nel caso della seconda algebra, applicando l'espressione (7) della potenza (n.° I) e raccogliendo si ha:

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x_1\, u_1 + x_2 \cos x_1\, u_2 + x_3 \cos x_1\, u_3 + \left(x_4 \cos x_1 - \frac{x_2^2}{2} \operatorname{sen} x_1\right) u_4$$

$$\cos x = \cos x_1\, u_1 - x_2 \operatorname{sen} x_1\, u_2 - x_3 \operatorname{sen} x_1\, u_3 - \left(x_4 \operatorname{sen} x_1 + \frac{x_2^2}{2} \cos x_1\right) u_4$$

$$e^x = e^{x_1}\, u_1 + x_2 e^{x_1}\, u_2 + x_3 e^{x_1}\, u_3 + \left(x_4 e^{x_1} + \frac{x_2^2}{2}\, e^{x_1}\right) u_4 .$$

Nel caso della terza algebra si ha:

$$\operatorname{sen} x = \left(x_1 - \frac{1}{3!} x_1^3 + \frac{1}{5!} x_1^5 - \ldots\right) u_1 + \left(x_2 - \frac{3}{3!} x_1^2 x_2 + \frac{5}{5!} x_1^4 x_3 - \right.$$

$$\left. - \frac{7}{7!} x_1^6 x_3 + \ldots\right) u_2 + \left(x_3 - \frac{3}{3!} x_1^2 x_2 + \frac{5}{5!} x_1^4 x_3 - \frac{7}{7!} x_1^6 x_3 + \ldots\right) u_3 +$$

$$+ \left(x_4 - \frac{3}{3!} x_1^2 x_4 - \frac{3}{3!} x_1 x_2^2 - \frac{3}{3!} x_1 x_3^2 + \frac{5}{5!} x_1^4 x_4 + \frac{10}{5!} x_1^3 x_2^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{10}{5} x_1^3 x_3^2 - \frac{7}{7!} x_1^6 x_4 - \frac{21}{7!} x_1^5 x_2^2 - \frac{21}{7!} x_1^5 x_3^2 + \ldots\right) u_4 .$$

Raccogliendo ed ordinando:

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x_1 u_1 + x_2 \cos x_1 u_2 + x_3 \cos x_1 u_3 + \left(x_4 \cos x_1 - \frac{x_2^2 + x_3^2}{2} \operatorname{sen} x_1\right) u_4 .$$

Analogamente:

$$\cos x = \left(1 - \frac{x_1^2}{2!} + \frac{x_1^4}{4!} - \ldots\right) u_1 - \left(\frac{2}{2!} x_1 x_2 - \frac{4}{4!} x_1^3 x_2 + \frac{6}{6!} x_1^5 x_2 - \ldots\right) u_2 -$$

$$= \left(\frac{2}{2!} x_1 x_3 - \frac{4}{4!} x_1^3 x_3 + \frac{6}{6!} x_1^5 x_3 \ldots\right) u_3 - \left(\frac{2}{2!} x_1 x_4 + \frac{x_2^2}{2!} + \frac{x_3^2}{2!} - \right.$$

$$\left. - \frac{4}{4!} x_1^3 x_4 - \frac{6}{4!} x_1^2 x_2^2 - \frac{6}{4!} x_1^2 x_3^2 + \frac{6}{6!} x_1^5 x_4 + \frac{15}{6!} x_1^4 x_2^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{15}{6!} x_1^4 x_3^2 + \ldots\right) u_4$$

e quindi:

$$\cos x = \cos x_1 u_1 - x_2 \operatorname{sen} x_1 u_2 - x_3 \operatorname{sen} x_1 u_3 - \left(x_4 \operatorname{sen} x_1 + \frac{x_2^2 + x_3^2}{2} \cos x_1\right) u_4 .$$

Ed infine:

$$e^x = \left(1 + x_1 + \frac{x_1^2}{2!} + \ldots\right) u_1 + \left(x_2 + \frac{2}{2!} x_1 x_2 + \frac{3}{3!} x_1^2 x_2 + \frac{4}{4!} x_1^3 x_2 + \ldots\right) u_2 +$$

$$+ \left(x_3 + \frac{2}{2!} x_1 x_3 + \frac{3}{3!} x_1^2 x_3 + \frac{4}{4!} x_1^3 x_3 + \ldots\right) u_3 + \left(x_4 + \frac{2}{2!} x_1 x_4 + \frac{x_2^2}{2!} +\right.$$

$$+ \frac{x_2^2}{2!} + \frac{3}{3!} x_1^2 x_4 + \frac{3}{3!} x_1 x_2^2 + \frac{3}{3!} x_1 x_3^2 + \frac{4}{4!} x_1^3 x_4 + \frac{6}{4!} x_1^2 x_2^2 +$$

$$\left. + \frac{6}{4!} x_1^2 x_3^2 + \ldots\right) u_4$$

ossia:

$$e^x = e^{x_1} u_1 + x_2 e^{x_1} u_2 + x_3 e^{x_1} u_3 + \left(x_4 + \frac{x_2^2 + x_3^2}{2}\right) e^{x_1} u_4.$$

Nel caso della quarta algebra (numeri quadripotenziali) si ha:

$$\operatorname{sen} x = \left(x_1 - \frac{1}{3!} x_1^3 + \frac{1}{5!} x_1^5 - \frac{1}{7!} 3 x_1^7 + \ldots\right) u_1 + \left(x_2 - \frac{3}{3!} x_1^2 x_2 +\right.$$

$$+ \frac{5}{5!} x_1^4 x_2 - \frac{7}{7!} x_1^6 x_2\Big) u_2 + \left(x_3 - \frac{3}{3!} x_1^2 x_3 - \frac{3}{3!} x_1 x_2^2 + \frac{5}{5!} x_1^4 x_3 +\right.$$

$$+ \frac{10}{5!} x_1^3 x_2^2 - \frac{7}{7!} x_1^6 x_3 - \frac{21}{7!} x_1 x_2^2 + \ldots\Big) u_3 + \left(x_4 - \frac{3}{3!} x_1^2 x_4 -\right.$$

$$- \frac{6}{3!} x_1 x_2 x_3 - \frac{x_2^3}{3!} + \frac{5}{5!} x_1^4 x_4 + \frac{20}{5!} x_1^3 x_2 x_3 + \frac{10}{5!} x_1^3 x_2^3 - \frac{7}{7!} x_1^6 x_4 -$$

$$\left. - \frac{42}{7!} x_1^5 x_2 x_3 - \frac{35}{7!} x_1^4 x_2^3 + \ldots\right) u_4.$$

Raccogliendo:

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x_1 u_1 + x_2 \cos x_1 u_2 + \left(x_3 \cos x_1 - \frac{x_2^2}{2} \operatorname{sen} x_1\right) u_3 +$$

$$+ \left(x_4 \cos x_1 - x_2 x_3 \operatorname{sen} x_1 - \frac{x_2^3}{3!} \cos x_1\right) u_4.$$

Analogamente:

$$\cos x = \left(1 - \frac{x_1^2}{2!} + \frac{x_1^4}{4!} + \frac{x_1^6}{6!} + \ldots\right) u_1 - \left(\frac{2}{2!} x_1 x_2 - \frac{4}{4!} x_1^3 x_2 +\right.$$

$$\left. + \frac{6}{6!} x_1^5 x_2 - \ldots\right) u_2 - \left(\frac{2}{2!} x_1 x_3 + \frac{x_2^2}{2!} - \frac{4}{4!} x_1^3 x_3 - \frac{6}{4!} x_1^2 x_2^2 +\right.$$

$$+\frac{6}{6!}x_1^5x_3+\frac{15}{6!}x_1^4x_2^2-\ldots\Big)u_3+\Big(\frac{2}{2!}x_1x_4+\frac{2}{2!}x_2x_3-\frac{1}{4!}x_1^5x_4-$$

$$-\frac{12}{4!}x_1^2x_2x_3-\frac{4}{4!}x_1x_2^3+\frac{6}{6!}x_1^5x_4+\frac{30}{6!}x_1^4x_2x_3+\frac{20}{6!}x_1^3x_2^3\ldots\Big)u_4.$$

Cioè:

$$\cos x=\cos x_1u_1-x_2\operatorname{sen}x_1u_2-\Big(x_3\operatorname{sen}x_1+\frac{x_2^2}{2!}\cos x_1\Big)u_3-$$

$$-\Big(x_4\operatorname{sen}x_1+x_2x_3\cos x_1-\frac{x_2^3}{3!}\operatorname{sen}x_1\Big)u_4.$$

Infine:

$$e^x=\Big(1+x_1+\frac{x_1^2}{2!}+\ldots\Big)u_1+\Big(x_2+\frac{2}{2!}x_1x_2+\frac{3}{3!}x_1^2x_2+\ldots\Big)u_2+$$

$$+\Big(x_3+\frac{2}{2!}x_1x_3+\frac{x_2^2}{2!}+\frac{3}{3!}x_1^2x_3+\frac{3}{3!}x_1x_2^2+\ldots\Big)u_3+$$

$$+\Big(x_4+\frac{2}{2!}x_1x_4+\frac{2}{2!}x_2x_3+\frac{3}{3!}x_1^2x_4+\frac{6}{3!}x_1x_2x_3+\frac{x_2^3}{3!}+\ldots\Big)u_4.$$

Cioè:

$$e^x=e^{x_1}u_1+x_2e^{x_1}u_2+\Big(x_3e^{x_1}+\frac{x_2^2}{2}e^{x_1}\Big)u_3+$$

$$+\Big(x_4e^{x_1}+x_2x_3e^{x_1}+\frac{x_2^3}{3!}e^{x_1}\Big)u_4.$$

Da questi sviluppi si vede che i coefficienti delle unità per le funzioni sen x e cos x in tutte e 4 le algebre sono funzioni o del sen x, o del cos x_1 o di entrambe, mentre per la funzione e^x i coefficienti si esprimono tutti mediante la sola funzione e^{x_1}.

Si osservi infine che per le funzioni sen x, cos x ed e^x il monocilindro di convergenza coincide con tutto l'S_8 reale rappresentativo: ciò di accordo con un teorema generale [1]).

---

[1]) N. Spampinato, *Sulle funzioni di una variabile in un' algebra complessa ad n unità dotate di modulo.* Rend. Circolo Matematico di Palermo, Tomo LVII, 1933, pp. 235-272.

Esperimenti di usura per abrasione su « scarpe » di legno per funi portanti di funivie.

Nota del Dott. Ing. **Camillo Zocchi**, *presentata dal socio* **C. L. Ricci**

(Adunanza del dì 2 febbraio 1939 - XVII)

Sunto. — In considerazione del notevole interesse economico rappresentato dalla possibilità di ridurre l'usura che le funi portanti delle funivie subiscono scorrendo sulle relative « scarpe » di appoggio, attualmente costituite di metallo, è stata iniziata, con un dispositivo sperimentale imitante le reali condizioni di lavoro, la determinazione della resistenza all'usura del legno nella costituzione di tali « scarpe ».

I risultati preliminarmente ottenuti confermano la possibilità di adottare tale materiale in luogo del metallo nella costituzione delle « scarpe », dato il limitato consumo che esso subisce, per talune essenze, e quello del tutto trascurabile che determina nella fune.

I. — *Premessa.*

Negli impianti di funivie, le funi portanti, che costituiscono il sostegno e la guida dei carrelli delle vetture, sono ancorate ad una delle estremità e tese all'altra, generalmente con l'interposizione di una breve fune flessibile detta tenditrice, passante su carrucole di rinvio, mediante un contrappeso che determina la tensione. Le funi portanti sono inoltre appoggiate, in corrispondenza dei sostegni intermedi tra le campate, su guide, generalmente fisse, dette « scarpe », disposte in modo che il piano medio di ciascuna di esse coincida con il piano individuato dalle tangenti estreme dei due rami della fune sopportata; ed opportunamente sagomate per accogliere la fune senza impedire il passaggio alle ruote dei carrelli.

Al variare della configurazione della fune portante nel moto delle vetture, questa fune scorre sulle scarpe, mentre la tenditrice procede, inflettendosi, sulla carrucola di rinvio; ne segue il verificarsi di usura per attrito radente sui fili esterni della portante, e, qualora la tenditrice sia a più manti di trefoli sovrapposti, anche di usura interna in questa fune, per i rilevanti scorrimenti relativi dei detti manti di trefoli, dovuti alla flessione sulla carrucola; la quale flessione, dato il valore del rapporto tra il diametro della fune tenditrice e il raggio di curvatura che essa assume, si verifica, in pratica, in condizioni più sfavorevoli che per la portante.

I fenomeni di usura anzidetti sono caratterizzati dalla limitata velocità relativa delle parti a contatto, la quale è, in media, dell'ordine di alcuni metri a minuto primo; e dalle elevate pressioni specifiche che si determinano

tra esse, in quanto la pressione delle funi sulle scarpe è ripartita su zone assai limitate nell'intorno dei punti di contatto geometrico delle funi aperte di formazione parallela od incrociata, quali sono generalmente le funi portanti per motivi che non occorre qui esporre, con la superficie delle scarpe: dalle caratteristiche suddette dell'usura segue che, oltre all'abrasione dei materiali costituenti la fune e la « scarpa », si verifica anche un sensibile rifollamento [1].

L'usura delle funi portanti dovuta all'attrito radente costituisce la più grave causa di loro deterioramento, la quale, data l'essenziale importanza di tali funi nella sicurezza dell'esercizio delle funivie, ne comporta la immediata sostituzione, non appena, dall'assidua vigilanza alla quale esse sono soggette, siano risultati oltrepassati taluni limiti inferiori del grado di stabilità delle funi stesse, atti a garantire in modo assoluto la sicurezza. È pertanto problema di notevole interesse economico il rimuovere la causa anzidetta di degradazione delle funi, dato anche l'elevato costo di esse, particolarmente notevole in relazione al costo di impianto e di esercizio delle funivie.

È, viceversa, trascurabile l'azione delle ruote dei carrelli nell'usura delle funi portanti, in quanto l'attrito che si verifica è, in tal caso, volvente, e la pressione di contatto è limitata, data la deformabilità del materiale che riveste le gole delle ruote stesse.

Per quanto concerne le funi tenditrici, il problema dell'usura interna può ritenersi già risolto con l'impiego di funi a manto semplice di trefoli e ad anima tessile; ovvero con la sostituzione ad esse, nella stazione di tensione, di settori oscillanti o di slitte articolate (carrelliere) scorrenti, mediante rulli, su guide rigide, e su cui si adagiano le funi portanti ad esse ancorate direttamente e sottratte, in tal modo, agli scorrimenti esterni.

Dalla pratica è risultato viceversa molto dubbia l'opportunità di adottare gli analoghi dispositivi all'uopo proposti (supporti a rulli, a cingoli etc.) [2] in sostituzione delle scarpe fisse, sicchè il problema di proteggere dall'usura le funi portanti è di valore pratico ed attuale.

Questo problema è da considerare dal punto di vista del proporzionamento delle scarpe ed in particolare della determinazione della curvatura di esse, [al riguardo si rimanda ad una esauriente trattazione di P. Ferretti [3]]; ed in relazione ai materiali. Di quest'ultimo aspetto del problema si è recentemente interessata la Commissione Ministeriale incaricata delle indagini sulle funivie in esercizio nel Regno, allo scopo di accertare lo stato di conservazione delle funi portanti; la Commissione ha segnalata l'opportunità, nei confronti dell'usura, di adottare « uno speciale rivestimento »

---

[1]) Cfr. Zocchi C., « *Sulla teoria dell' usura meccanica dei metalli* », IV. Schienentagung, Düsseldorf, 1938.

[2]) Cfr. Zignoli V., « *Funivie* », 1938, p. 123.

[3]) Annali del R. Istituto Superiore Navale di Napoli, II (1933), p. 193 e segg.

« per le scarpe di natura diversa da quella usata attualmente (bronzo o » « ferro dolce) che non ha dato buona prova » [4]), nonchè di conseguire una conveniente lubrificazione delle scarpe stesse.

In relazione a quanto precede, presso il Laboratorio per le prove dei materiali annesso all'Istituto di Scienza delle Costruzioni diretto dal prof. C. L. Ricci nella Facoltà di Ingegneria della R. Università di Napoli, lo scrivente ha istituiti appositi esperimenti intesi a definire il comportamento di taluni materiali di limitata durezza, ed in particolare del legno, nella costituzione delle scarpe delle funi portanti [5]): tale scelta è giustificata dall'attenuazione, che con tali materiali si otterrebbe, della disuniformità della pressione agente sulle scarpe stesse, le quali si adatterebbero meglio alla superficie delle funi aperte; inoltre, il detrito del legno, purchè sia privo, come accade in genere, di costituenti silicei [6]), non può esercitare una sensibile azione abrasiva sulla fune, contrariamente a quanto invece opera il detrito metallico. Il legno è, infine, per talune essenze, suscettibile di sopportare, anche nella fase iniziale dell'adattamento, delle notevoli pressioni distribuite su aree ridottissime, senza subire schiacciamento, oltre quello strettamente locale [7]).

I risultati preliminari che vengono riferiti nella presente nota, escludono, almeno per le essenze sinora sperimentate, il dubbio, esprimibile a prima vista, che si possa verificare un'usura eccessivamente rapida, nell'impiego proposto; e giustificano il proseguimento, tuttora in corso, della ricerca.

II. — *Metodo di prova.*

Si è ritenuto che le prove normali all'abrasione, effettuate con dispositivi del tipo Bauschinger con mola a smeriglio, ovvero del tipo Gary a getto di sabbia, che si eseguono in condizioni troppe lontane da quelle che si verificano nel caso in esame, non avrebbero fornito alcun risultato attendibile. Rinunziando per ora alla definizione di una prova accelerata adatta allo scopo attuale, è stato costruito pertanto uno speciale dispositivo (vedi tavola) che realizza per quanto possibile le condizioni della realtà. Esso consiste in una leva oscillante intorno ad un asse orizzontale disposta al disopra della tavola di una piallatrice, parallelamente alla direzione del moto di essa; sulla tavola è fissato longitudinalmente uno spezzone di fune, che

[4]) Ministero delle Comunicazioni, Bollettino Ufficiale del R. Ispettorato Generale Ferrovie, Tramvie, Automobili, gennaio 1939, p. 23 dell'estratto.

[5]) Sono allo studio le essenze seguenti: Sorbo, Frassino, Carpino, Teak, Algarrobo, Guajaco, Quebracho.

[6]) Su questi costituenti abrasivi, cfr. Piccoli L., « *I legnami* », (1927), Nota a pag. 40.

[7]) Cfr. Graf, Bauingenieur, 1929, p. 437.

risulta pertanto animato di moto alternativo, con velocità costante, essendo escluso il dispositivo di ritorno rapido; sullo spezzone di fune insiste il provino del materiale in esame, sagomato trasversalmente a gola semicircolare, adattata alla superficie della fune, e fissato rigidamente alla leva mediante una scatola metallica con viti di pressione. La leva viene caricata all'estremità libera in modo da ottenere sul provino la voluta pressione; il valore effettivo di questa pressione varia di pochissimo tra i lembi opposti del provino, essendo molto piccolo il rapporto tra lo spessore del provino stesso (cm. 4) e la distanza della mezzeria del provino dall'asse di rotazione della leva (cm. 100) [8]). Tale pressione, inoltre, non risulta influenzata dalle forze di attrito agenti sulla gola del provino, poichè la risultante delle dette forze incontra l'asse di rotazione della leva, data la reciproca posizione della fune e della leva stessa [9]). Il dispositivo così realizzato, per la rigorosa legge cinematica di alimentazione del provino e la costanza della distribuzione delle pressioni, consente una soddisfacente comparabilità dei risultati ottenuti operando su materiali di caratteristiche diverse, in particolare di coefficienti di attrito assai differenti.

Lo scrivente si propone di effettuare, con lo stesso dispositivo, anche la determinazione del coefficiente di attrito tra le scarpe di legno e la fune, consentendo la leva, che è costituita da due profilati paralleli affiancati, la possibilità di far scorrere nel mezzo, lungo la fune, la scatola contenente il provino opportunamente provvista, allo scopo, di sferette mobilissime di guida, semi-incassate nelle pareti della scatola stessa, ed a dolce sfregamento con i profilati. Risulterebbe di particolare interesse adottare invero, nella costituzione delle scarpe, un materiale che presentasse, con le funi, un attrito statico prossimo a quello dinamico, in quanto eviterebbe il movimento a strappi, che talvolta si verifica delle funi sulle scarpe [10]).

Il percorso relativo della fune e del provino viene dedotto dalla lettura di un contatore, che misura il numero delle corse alterne, di ampiezza costante. La misura del logorio, attese le finalità pratiche della presente indagine, è stata effettuata in base alla diminuzione dell'altezza del provino: invero l'usura dà luogo, oltre che a detrito (abrasione), anche a costipamento ed a dislocazione delle fibre del legno, senza asportazione di materia: la caratte-

[8]) Se si ammette la legge di Reye, risulta, in tal caso, lo scarto tra le pressioni sui lembi ed in mezzeria del provino (pressione media p_m) pari a $\frac{4p_m}{2\times 100} = 2\,\%\, p_m$.

[9]) Tale posizione è stata determinata nell'ipotesi che la pressione nella gola della scarpa risulti $p_\alpha = p_{max} \cdot \cos\alpha$.

[10]) Secondo H. Herbst [Reibungszahlen für Koepescheiben (1931)] risulterebbe, per funi parallele su legno: $\frac{f_s}{f_d} \simeq 2$; cfr. Findeis R., « Rechnerische Grundlagen des Baues von Drahtseilbahnen » (1923) p. 93; e Stabilini L., L'Industria (1927) n. 14-15, pag. 5 dell'estratto.

ristica prescelta nel fenomeno da misurare appare pertanto più significativa della perdita di peso. Per la misura è stato impiegato un collimatore graduato al centesimo di millimetro.

III. — *Risultati delle prove.*

Una prima serie di esperimenti è stata compiuta su provini di sorbo, del peso specifico di 845 Kg./mc., con anelli di accrescimento spessi 1-2 mm.; e su provini di frassino, del peso specifico di 722 Kg./mc. con anelli di 4-5 mm.; per entrambe le essenze, i provini sono stati orientati in modo che la fune risultasse parallela all'asse del tronco arboreo, e con i piani medi nel senso radiale del tronco stesso.

I risultati che seguono si riferiscono a prove effettuate su di una fune « *Hercules* » con formazione 1 + 6 + 12 di 45 mm. di diametro [11]). Il carico per cm. di lunghezza della gola del provino è stato limitato in questa serie a 10 Kg. [12]), e si è proceduto senza lubrificazione alcuna: i risultati non potranno che migliorare, nei confronti dell'ammissibilità del legno nell'applicazione proposta, qualora si operi con opportuna lubrificazione; è tuttora allo studio la scelta di un lubrificante di caratteristiche idonee allo scopo.

Si è riscontrato che l'usura della fune è inapprezzabile in relazione ai metodi di misura dell'usura stessa attualmente seguiti [13]).

Usura sotto il carico di 10 Kg./cml. dopo ciascuno dei successivi percorsi di 500 m. alla velocità di circa 10 metri al minuto primo.

Sorbo mm. 0,277 ; 0,278 ; 0,126 ; 0,121
0,096 ; 0,079 ; 0,087
media della 1ª e 2ª prova mm. 0,2775
» dalla 3ª alla 7ª » » 0,102

Frassino mm. 0,365 ; 0,355 ; 0,145 ; 0,160
0,125 ; 0,152
media della 1ª e 2ª prova mm. 0,360
» dalla 3ª alla 7ª » » 0,145

Il legno subisce inizialmente un sensibile rifollamento, che si stabilizza ben presto, come è manifestamente dimostrato dall'aspetto compatto e brunito che esso assume alla superficie logorata; l'usura per abrasione si verifica sul materiale in tal modo costipato, con valori approssimativamente pro-

---

[11]) Il materiale è stato cortesemente fornito al Laboratorio del Ch.mo Ing. F. Ettmayer di Adelsburg, Direttore delle Funicolari aeree di Cortina d'Ampezzo.

[12]) I valori estremi di tale carico nelle funivie italiane risultano attualmente di 11,5 e di 67 Kg., che si verificano rispettivamente nelle funivie Ortisei-Alpe di Siusi e Cortina-Pocol (cfr. D'Armini, in « Riv. Tecn. Ferr. It. » (1936) p. 69).

[13]) Ministero delle Comunicazioni, l. c.

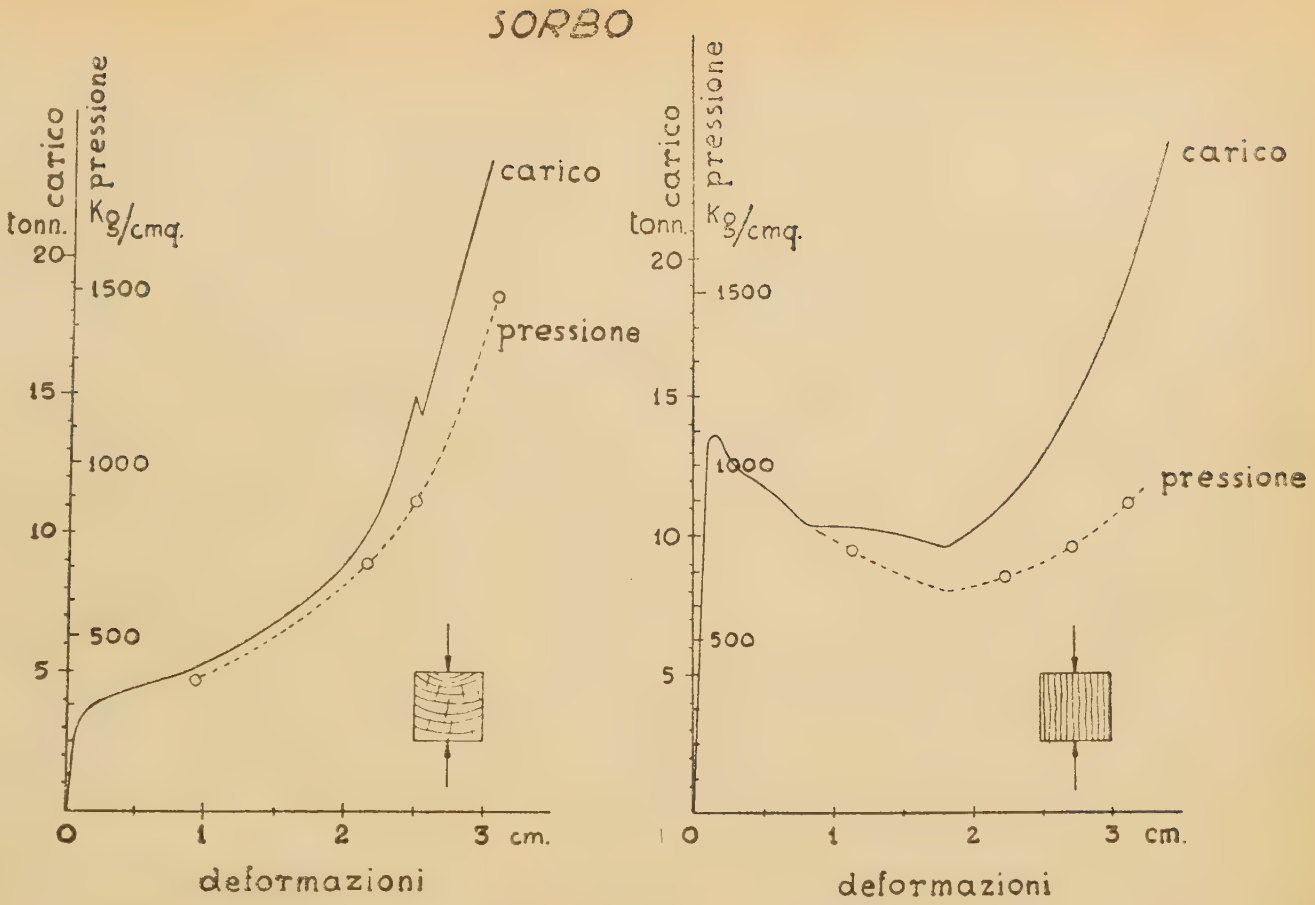

SORBO
carico
pressione
tonn.
Kg/cmq.
20
15
10
5
1500
1000
500
carico
pressione
0
1
2
3 cm.
deformazioni
carico
pressione
tonn.
Kg/cmq.
20
15
10
5
1500
1000
500
carico
pressione
0
1
2
3 cm.
deformazioni

Fig. 1.

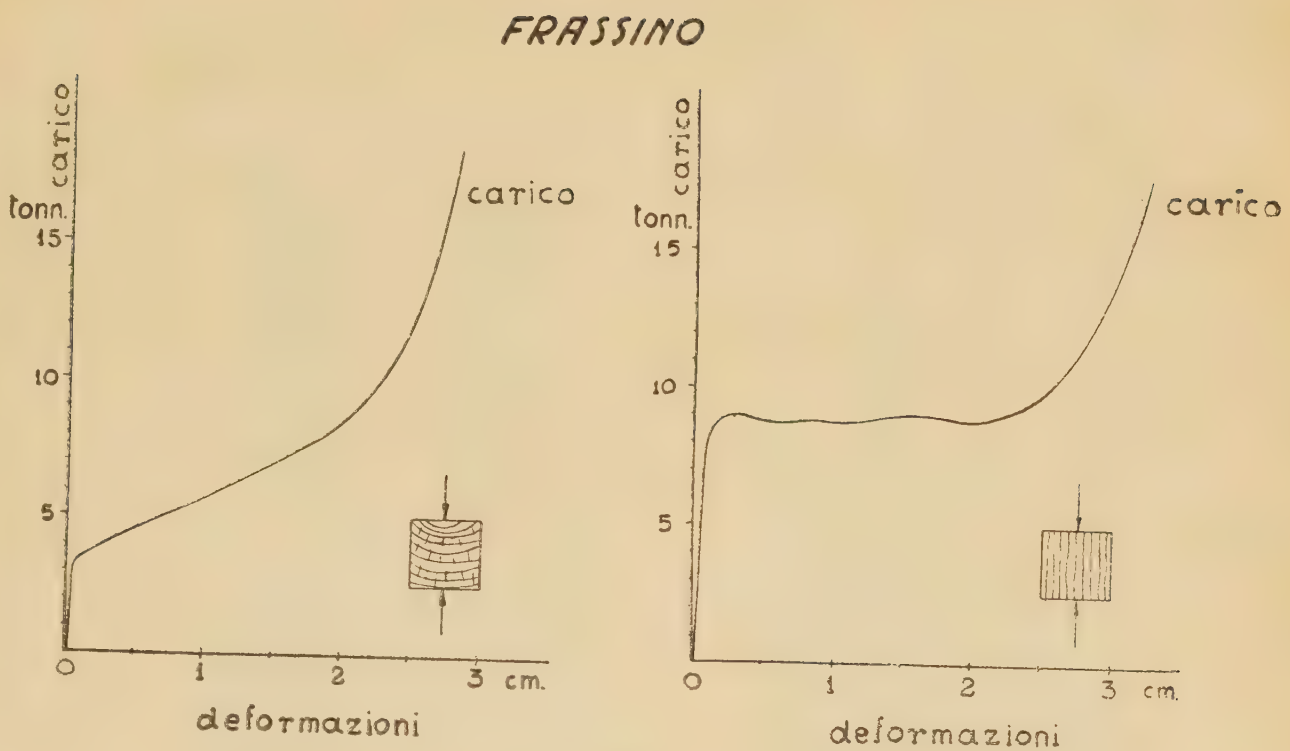

FRASSINO
carico
tonn.
15
10
5
0
1
2
3 cm.
deformazioni
carico
carico
tonn.
15
10
5
0
1
2
3 cm.
deformazioni

Fig. 2.

porzionali ai percorsi. Può assumersi quindi l'usura media nelle condizioni indicate, prescindendo dalla deformazione iniziale:

Sorbo: mm. 0,2 per Km.
Frassino: mm. 0,3 per Km.

Tali risultati acquistano particolare significato se si consideri che un impianto di funicolare aerea deve porsi in revisione almeno dopo 5000 corse; e che, in media, negli impianti esistenti, lo scorrimento complessivo di ciascuna delle funi portanti sulle scarpe è di m. 5 per corsa. Risulta pertanto, nel periodo intercorrente tra due revisioni, un percorso di 25 Km., che importa nelle condizioni sperimentate, l'usura di mm. 5 per il sorbo e di mm. 7,5 per il frassino: tali consumi sono perfettamente tollerabili, e sono quindi compatibili con il normale periodo di esercizio continuativo.

IV. — *Rilievi sul comportamento del legno*

Si è riferito che i provini sono stati assoggettati all'usura in modo che la pressione agisse radialmente ed il moto della fune fosse diretto assialmente rispetto alle fibre, ritenendo tale disposizione come la più opportuna in quanto le fibre vengono sollecitate dalle forze di attrito secondo la direzione assiale, che è notoriamente quella della massima resistenza a trazione del legno.

L'opportunità di esercitare la pressione nel senso radiale risulta ancora dal noto costipamento senza rottura che il legno presenta in tale direzione [15]) e che consente l'adattamento delle scarpe alla superficie della fune, senza che si verifichino schiacciamenti locali con asportazione di detrito.

Tale comportamento risulta in modo evidente dei diagrammi (Figg. 1 e 2) e dell'aspetto dei provini assoggettati alla prova di compressione (vedi tavola).

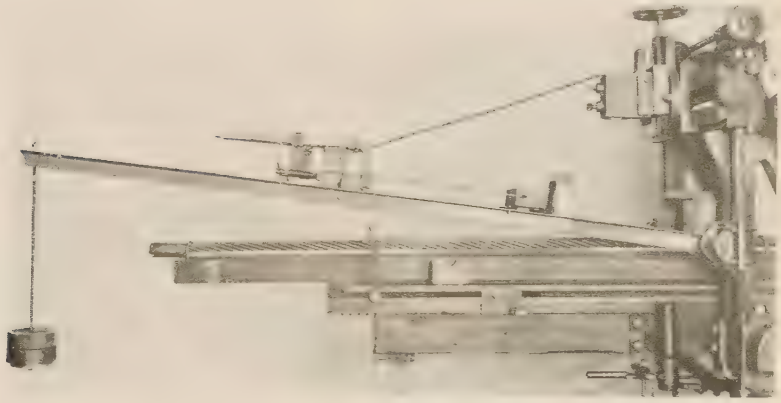
I provini avevano forma cubica di 5 cm. di lato; e vennero compressi sino a 24 tonn.

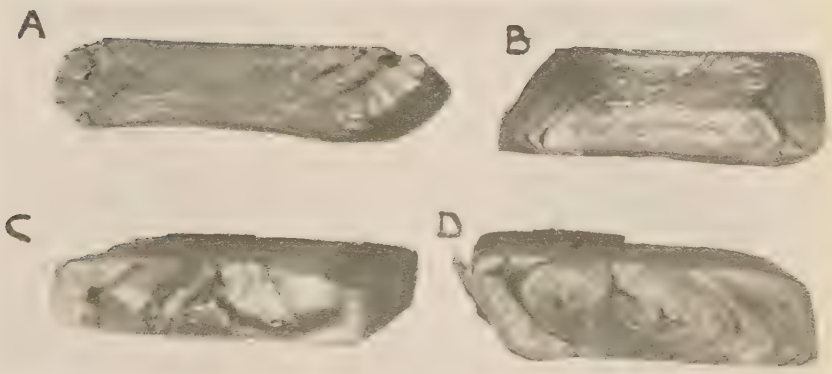
Dal diagramma, *deformazione-carico* ottenuto direttamente con una macchina Amsler da 50 tonn., è stato dedotto (v. Fig. 1) quello *deformazione-pressione*, mediante la misura della effettiva sezione del provino deformato durante la prova.

Il materiale sollecitato radialmente acquista una elevata compattezza, mentre esso, se sollecitato assialmente, si disloca nell'intera massa con separazione dei fasci di fibre; inoltre, nel primo caso, il carico sopportato progredisce più regolarmente che nell'altro.

Istituto di Scienza delle Costruzioni della R. Università di Napoli, gennaio 1939 - XVII.

[15]) Cfr. Perfetti, « *Association Internationale pour l'Essai des Materiaux* ». Congrès de Zürich, 1932; II, pag. 116 e seguenti.





A = Frassino compresso in senso radiale.
B = Sorbo » » » »
C = Frassino » » » assiale.
D = Sorbo » » » »

Torsione e taglio negli archi piani a grande curvatura

Nota del prof. **Franco Jossa**, *presentata dal socio* **C. L. Ricci**

(Adunanza del dì 2 marzo 1939 - XVII)

Sunto. — Si studia il caso dei solidi a grande curvatura sollecitati a torsione e taglio, e si mostra come il problema si può risolvere per analogia con quello di Saint-Venant, tenendo conto della diversità degli scorrimenti e della diversa espressione della funzione $\psi(x, y)$. Si procede al calcolo di detta funzione per il caso di un solido a sezione rettangolare, e si mostra come i due casi della torsione e del taglio possano riunirsi in un solo più generale, nel quale si riesce facilmente a distinguersi i diversi casi particolari.

Nella trattazione che segue, ci proponiamo di esaminare il comportamento dei solidi ad asse curvilineo soggetti a torsione e a taglio, in ispecial modo a torsione. Intendiamo con ciò colmare una lacuna esistente nell'abituale trattazione dei solidi a semplice curvatura. Normalmente, di solito, si limita tale trattazione al caso dello sforzo normale e della flessione determinata da una coppia agente nel piano dell'asse curvilineo della trave; il Ricci [1]) ha poi studiate le tensioni tangenziali determinate dallo sforzo di taglio agente nel piano dell'asse della trave nonchè dalla variazione del raggio di curvatura, e il Del Vecchio [2]) ha estesa la trattazione al caso in cui le sezioni radiali e le caratteristiche delle sollecitazioni esterne non siano simmetriche rispetto al piano contenente l'asse del solido.

Nel presente studio si prende invece in esame particolarmente il caso della torsione, ma si mostra anche che non v'è netta distinzione tra la trattazione della torsione e quella del taglio; che anzi le due sollecitazioni si possono studiare partendo da un'unica espressione degli spostamenti che si producono nei punti di una sezione trasversale. Tale espressione comprende il caso della torsione pura e quello del taglio comunque diretto, permettendo anche di studiare separatamente l'effetto delle componenti del taglio dirette secondo gli assi principali d'inerzia della sezione. Si ha in altri termini l'espressione più generale degli spostamenti prodotti da sollecitazioni tangenziali.

La trattazione è svolta in modo analogo a quello del problema di Saint-

---

[1]) Ricci C. L., *Complementi alla teoria statica degli archi piani a grande curvatura.* Atti della R. Accademia d'Italia, Roma, 1932.

[2]) Del Vecchio G., *Generalizzazione della teoria statica degli archi piani a grande urvatura.* Rend. R. Accademia delle Scienze Fis. e Matem., Napoli, 1935.

VENANT per i solidi ad asse rettilineo, anzi vuol essere un'ampliamento e una trasformazione analogica del detto problema per il caso in esame.

La via che si indica per la soluzione del problema è assolutamente generale, ma perchè il problema stesso possa praticamente risolversi occorre impostarlo per il caso particolare, di una determinata sezione, come si vedrà in seguito, onde esso si modifica nella sua espressione caso per caso.

Si consideri un solido a sezione costante, il cui asse geometrico sia un cerchio di raggio r. Esso sia riferito a un sistema di coordinate caratterizzato dalla posizione del punto generico rispetto ad assi x ed y giacenti nel piano della sezione trasversale generica e dall'angolo φ che tale piano forma con un altro piano prefissato, preso come origine.

Gli assi x ed y siano gli assi principali di inerzia della sezione, che si incontreranno quindi nel punto O baricentro della sezione stessa, e l'asse y sia contenuto nel piano dell'asse del solido; e si consideri anche l'asse z normale alla sezione e tangente in O all'asse curvilineo della trave.

Con le notazioni abituali, le componenti speciali di tensione riferite agli assi x, y, z, saranno:

$$\sigma_x,\ \sigma_y,\ \sigma_z \qquad ; \qquad \tau_{yz},\ \tau_{zx},\ \tau_{xy}$$

e le equazioni indefinite dell'equilibrio, che legano tali grandezze, saranno, supponendo nulle le forze di massa [3]):

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \frac{\tau_{xy}}{r+y} = 0 \\
&\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \frac{\sigma_y - \sigma_z}{r+y} = 0 \qquad [1] \\
&\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{2\tau_{yz}}{r+y} = 0.
\end{aligned}$$

In relazione a quanto si pone nel problema di SAINT-VENANT, nei limiti di approssimazione del quale intendiamo mantenerci, potremo porre, salvo quanto preciseremo in seguito:

$$\tau_{xy} = \sigma_x = \sigma_y = 0.$$

Con le posizioni ora fatte, le [1] divengono:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} = 0 \\
&\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} - \frac{\sigma_z}{z+y} = 0 \\
&\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{2\tau_{yz}}{r+y} = 0
\end{aligned}$$

[3]) Cfr. LOVE, *A treatise on the mathematical theorie of elasticity*. Cambridge, 1920, pag. 89; e, nella forma in cui sono scritte sopra, v. anche: RICCI, op. cit., pag. 8.

dalle quali:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial z} = 0 \\
&\frac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{E}{G}\,\frac{1}{r+y}\,\frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\
&\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\,\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{2}{r+y}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) = 0.
\end{aligned} \qquad [2]$$

Essendo poi, in generale:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \frac{\sigma_y + \sigma_z}{m}\right) \\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \frac{\sigma_z + \sigma_x}{m}\right) \\
\varepsilon_z &= \frac{1}{E}\left(\sigma_z - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{m}\right)
\end{aligned}$$

si ha:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\frac{\varepsilon_z}{m}.$$

E poichè, come si è detto, è anche:

$$\gamma_{xy} = 0$$

si determinano altre due condizioni per gli spostamenti u, v, w, e cioè:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{m}\,\frac{\partial w}{\partial z} \\
&\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0.
\end{aligned} \qquad [3]$$

In ultimo, supponiamo che gli assi siano collegati all'elemento infinitesimo contiguo al baricentro della sezione; si ha allora, per $x = y = z = 0$:

$$\begin{aligned}
&u = v = w = 0 \\
&\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} = 0.
\end{aligned} \qquad [4]$$

Supponiamo che il solido in esame sia sottoposto a forze esterne producenti, in una determinata sezione, soltanto sollecitazioni tangenziali, e prendiamo in esame gli spostamenti u, v, w indotti nei diversi punti di essa da tali sollecitazioni. Supponiamo che i detti punti subiscano soltanto, nel piano della sezione, una rotazione intorno a un punto della sezione stessa.

Nel passare da una sezione ad un'altra il cui piano faccia con quello della prima l'angolo $d\varphi$, poichè le diverse fibre longitudinali che passano per i diversi punti della sezione, hanno, tra due sezioni, lunghezza diversa, proporzionale ad $\frac{r+y}{r}$, si avranno le seguenti espressioni generali:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z} &= -c\,\frac{r}{r+y}(y+A) \\ \frac{\partial v}{\partial z} &= c\,\frac{r}{r+y}(x-B). \end{aligned} \qquad [5]$$

L'ingobbimento della sezione potrà essere rappresentato mediante la espressione generica:

$$w = c\left[\frac{r}{r+y}(Ax+By) - \psi(x,y)\right] = c\,\Psi(x,y). \qquad [6]$$

Gli scorrimenti γ_{yz} e γ_{xz} saranno dati per conseguenza dalle:

$$\begin{aligned} \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = c\left[\frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{r}{r+y}(x-B)\right] \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = c\left[-\frac{r}{r+y}(y+A) + \frac{\partial \Psi}{\partial x}\right]. \end{aligned} \qquad [7]$$

Calcoliamo ora le corrispondenti caratteristiche delle forze esterne. Si ha subito:

$$N = 0 \qquad M_z = 0.$$

E poi:

$$\begin{aligned} T_y &= Gc\left[\int_A \frac{\partial \Psi}{\partial y}\,dA + r\int_A \frac{x-B}{r+y}\,dA\right] \\ T_x &= Gc\left[\int_A \frac{\partial \Psi}{\partial x}\,dA - r\int_A \frac{y+A}{r+y}\,dA\right] \\ M_t &= Gc\left[\int_A \frac{\partial \Psi}{\partial y}\,x\,dA - \int_A \frac{\partial \Psi}{\partial x}\,y\,dA + r\int_A \frac{x^2}{r+y}\,dA + r\int_A \frac{y^2}{r+y}\,dA + r\int_A \frac{yA}{r+y}\,dA\right] \end{aligned} \qquad [8]$$

e se si pone

$$I_p = r\left[\int_A \frac{x^2}{r+y}\,dA + \int_A \frac{y^2}{r+y}\,dA\right]$$

l'espressione del fattore q' di torsione diventa, nel nostro caso:

$$q' = \frac{I'_p}{I'_p - \int_A \left(x \frac{\partial \Psi}{\partial y} - y \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{r y A}{r + y} \right) dA} \qquad [9]$$

analoga a quella relativa ai solidi ad asse rettilineo, con la sola differenza che al posto del momento di inerzia polare vi compare un momento polare « virtuale » [4]), e che il denominatore ha un termine in più, che si annulla se $A = 0$, oltre che se $r = \infty$.

La sollecitazione caratterizzata dagli spostamenti u, v, w sopra scritti è quindi di torsione e di taglio. Difatti non si può ora dimostrare che la risultante di taglio è senz'altro nulla, dato che la Ψ, come è facile constatare, non è armonica, e l'applicazione del lemma di GREEN, per conseguenza, non giova; ovvero, seguendo la via più intuitiva indicata dal RICCI [5]), dato che, essendo diversa da zero la divergenza del vettore τ_z, il flusso in una striscia compresa tra due traiettorie non è costante e la risultante di traslazione non è più relativa a forze rappresentate da una linea chiusa, quindi nulla.

Notando però che il fenomeno è simmetrico rispetto all'asse y, si può subito dimostrare che è:

$$T_y = 0$$

sempre che sia $B = 0$; e ciò che sarà confermato quando individueremo l'espressione della Ψ.

La T_x non è invece nulla in generale. Si avrà per conseguenza torsione pura quando essa sarà nulla, torsione e taglio quando sarà invece diversa da zero. Vedremo in seguito come i due casi possano facilmente individuarsi e distinguersi.

Le espressioni delle τ saranno date dalle:

$$\begin{aligned} \tau_{yz} &= q' \frac{M_t}{I'_p} \left[\frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{r}{r+y} (x - B) \right] \\ \tau_{zx} &= q' \frac{M_t}{I'_p} \left[\frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{r}{r+y} (y + A) \right] \end{aligned} \qquad [10]$$

dove q' è il particolare fattore di torsione sopra individuato.

Dal punto di vista analitico quindi, il problema è ridotto a determinare

[4]) DEL VECCHIO, Op. cit.

[5]) RICCI C. L., *Contributo allo studio statico dei cilindri elastici soggetti a torsione, taglio e flessione* ecc. Rend. R. Acc. delle Scienze Fis. e Mat., Napoli, 1957.

la funzione Ψ in modo che soddisfi alle condizioni [2], [3], [4] diverse da quelle valevoli per i solidi ad asse rettilineo, oltre che alle condizioni al contorno, dipendenti dalla forma della sezione [6]).

Per poter proseguire nella trattazione, occorre ora riferirsi ad un particolare solido che abbia sezione trasversale di determinata forma. Per trattare un caso molto comune nella pratica, prendiamo in esame un solido a sezione rettangolare di lati $2a$ e $2b$, riferita al solito sistema di assi $O\,(x, y)$, dove O è il baricentro della sezione, x e y due assi ortogonali paralleli ai lati $2a$, $2b$ rispettivamente, e situati come si è detto in principio.

In considerazione delle espressioni delle τ soprascritte, le condizioni ai limiti dànno:

per $x = \pm a$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{r}{r+y}(y + A) \qquad [11]$$

per $y = \pm b$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = -\frac{r}{r+y}(x - B). \qquad [12]$$

Intanto, essendo la w data dalla [7] si ha:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = c\left(\frac{rA}{r+y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) \quad ; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = c\left(-\frac{rAx}{(r+y)^2} + \frac{Br^2}{(r+y)^2} - \frac{\partial \psi}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = c\left(\frac{2rAx}{(r+y)^3} - \frac{2Br^2}{(r+y)^3} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right)$$

e quindi l'ultima delle [2] diventa:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{2}{r+y}\left|\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{r}{r+y}(x - B)\right|. \qquad [13]$$

Devono poi ancora essere soddisfatte le condizioni:

$$\left[\frac{\partial \psi}{\partial x}\right]_{0,0} = A$$

$$\left[\frac{\partial \psi}{\partial y}\right]_{0,0} = B \qquad [14]$$

e si può poi farè in modo che sia $\Psi_{0,0} = 0$, dato che la Ψ è determinata a meno di una costante.

[6]) Come risulta chiaramente da quanto precede, la presente trattazione è svolta con criteri assolutamente diversi da quelli adoperati in altri lavori sugli archi a grande curvatura comparsi in questi ultimi tempi.

La ricerca della funzione $\psi(x, y)$ che soddisfi alle condizioni ora scritte [11], [12], [13], [14] si presenta, com'è evidente, molto più complessa che non quella analoga per i solidi ad asse rettilineo. Il $\Delta_2\psi$ difatti non è nullo, quindi la $\psi(x, y)$ non è armonica; esso non è neppure eguale ad una costante, ma è invece addirittura variabile in relazione ad una delle prime derivate della ψ stessa.

Determineremo quindi anzitutto una funzione ψ che soddisfi la condizione nell'interno della sezione. Tale funzione si potrà esprimere per mezzo di due altre ψ_1 e ψ_2, delle quali la ψ_2 consti di un numero arbitrario di termini, tutti funzioni della sola y, e tutti tali che risulti soddisfatta, per qualsiasi numero di essi, la [13]. Poichè tali termini potranno essere moltiplicati per coefficienti arbitrari, si determineranno tali coefficienti in modo da soddisfare le condizioni sul contorno. Si potrebbe allora rendere minimo sul contorno stesso lo scarto quadratico, con noti procedimenti d'analisi. Preferiamo invece seguire un'altra via che ci avvicina di più alla soluzione esatta e risulta notevolmente più breve.

Determineremo cioè i coefficienti in modo da soddisfare esattamente la condizione [12] cioè lungo i lati $y = \pm b$, e da soddisfare la condizione [11] in quanti punti si vogliano dei lati $x = \pm a$.

Si consideri la funzione:

$$\psi = -\frac{x}{r+y} + \frac{1}{4}[x^3 - 3a^2x - (r+y)^2x] + 2rx\log(r+y) + \\ + x[k_1 f_1(y) + k_2 f_2(y) + \ldots\ldots k_n f_n(y)]. \qquad [15]$$

Si ha per essa:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{1}{r+y} + \frac{3}{4}(x^2 - a^2) - \frac{(r+y)^2}{4} + 2r\log(r+y) + k_1 f_1(y) + \ldots\ldots k_n f_n(y)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{x}{(r+y)^2} + \frac{2rx}{r+y} - \frac{x(r+y)}{2} + x[k_1 f'_1(y) + \ldots\ldots k_n f'_n(y)]$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{3}{2}x$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = -\frac{2xr}{(r+y)^3} - \frac{2x}{(r+y)^2} - \frac{x}{2}x + [k_1 f''_1(y) + \ldots\ldots k_n f''_n(y)]$$

$$\psi_{0,0} = 0.$$

E risulta per conseguenza:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = x - \frac{2xr}{(r+y)^3} - \frac{2x}{(r+y)^2} + x[k_1 f''_1(y) + \ldots\ldots k_n f''_n(y)]$$

$$\left[\frac{\partial\psi}{\partial x}\right]_{0,0} = A = -\frac{1}{r} - \frac{3a^2}{4} - \frac{r^2}{4} + 2r\log r$$

$$\left[\frac{\partial\psi}{\partial y}\right]_{0,0} = B = 0$$

onde è soddisfatta la [13] sempre che si possa avere:

$$f_i''(y) = -\frac{2}{r+y} f_i'(y).$$

Si ponga ora:

$$f_1(y) = \frac{y^2 - r^2}{(y+r)^2} - 1$$

$$f_2(y) = \frac{y^3 - 3r^2y - 2r^3}{(y+r)^3} - 2$$

$$f_3(y) = \frac{y^4 - 6r^2y^2 - 8ry^3 - 3r^4}{(y+r)^4} - 3$$

$$f_4(y) = \frac{y^5 - 10y^3r^2 - 20y^2r^3 - 15yr^4 - 4r^5}{(y+r)^5} \quad 4.$$

Si ha per conseguenza:

$$f_1'(y) = \frac{2yr + 2r^2}{(y+r)^3}$$

$$f_2'(y) = \frac{3y^2r + 6yr^2 + 3r^3}{(y+r)^4}$$

$$f_3'(y) = \frac{4y^3r + 12y^2r^2 + 12yr^3 + 4r^4}{(y+r)^5}$$

$$f_4'(y) = \frac{5y^4r + 20y^3r^2 + 30y^2r^3 + 20yr^4 + 5r^5}{(y+r)^6}$$

e poi:

$$f_1''(y) = \frac{-4yr - 4r^2}{(y+r)^4} = -\frac{2}{y+r} f_1'(y)$$

$$f_2''(y) = \frac{-6y^2r - 12yr^2 - 6r^3}{(y+r)^5} = -\frac{2}{y+r} f_2'(y)$$

$$f_3''(y) = \frac{-8y^3r - 24y^2r^2 - 24yr^3 - 8r^4}{(y+r)^6} = -\frac{2}{y+r} f_3'(y)$$

$$f_4''(y) = \frac{-10y^4r - 40y^3r^2 - 60y^2r^3 - 40yr^4 - 10r^5}{(y+r)^7} = -\frac{2}{y+r} f_4'(y).$$

Onde, come si desiderava, è soddisfatta l'equazione fondamentale:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = -\frac{2}{r+y}\left[\frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{2}{r+y}(x-B)\right].$$

Occorre ora soddisfare le condizioni ai limiti. La

$$\left[\frac{\partial\psi}{\partial y}\right]_{y=+r} = -\frac{r}{r+y}(x-B) \quad \text{diviene} \quad \left[\frac{\partial\psi}{\partial y}\right]_{y=+r} = -\frac{rAx}{(r\pm h)^2} + \frac{rx}{r\pm h} \quad [16]$$

a comporta le due seguenti:

$$\begin{aligned} -\frac{rA}{(r+b)^2}+\frac{r}{r+b} &= \frac{1}{(r+b)^2}-\frac{2r}{r+b}-\frac{r+b}{2}+k_1 f_1'(b)+\ldots\ldots k_n f_n'(b) \\ -\frac{rA}{(r+b)^2}+\frac{r}{r-b} &= \frac{1}{(r-b)^2}-\frac{2r}{r-b}-\frac{r-b}{2}+k_1 f_1'(-b)+\ldots\ldots k_n f_n'(-b) \end{aligned} \qquad [17]$$

le quali non contengono x, onde, risolte le [17] e calcolate le k, la [16] è sempre soddisfatta, per qualunque valore di x.

La

$$\left[\frac{\partial\psi}{\partial x}\right]_{x=\pm a}=\frac{r}{r+y}(y+A) \qquad \text{diviene} \qquad \left[\frac{\partial\psi}{\partial x}\right]_{x=\pm a}=-\frac{yr}{r+y} \qquad [18]$$

è non è invece soddisfatta. Ma intanto, sull'asse x, cioè sui punti per cui è anche $y=0$, essendo $f_1(y)=0$ si ha:

$$\left[\frac{\partial\psi}{\partial x}\right]_{x=\pm a}=-\frac{1}{r}-\frac{r^2}{4}+2r\log r=A+\frac{3a^2}{4}$$

e si può rendere eguale a zero, come dovrebbe essere, aggiungendo alla $\frac{\partial\psi}{\partial x}$ dei termini indipendenti da x e y, che muteranno soltanto il valore di A.

Poi si può porre, per esempio,

$$\begin{aligned} -\frac{br}{r+b} &= -\frac{1}{r+b}-\frac{(r+b)^2}{4}+2r\log(r+b)+k_1 f_1(b)+\ldots\ldots k_n f_n(b) \\ \frac{br}{r-b} &= -\frac{1}{r-b}-\frac{(r-b)^2}{4}+2r\log(r-b)+k_1 f_1(-b)+\ldots\ldots k_n f_n(-b) \end{aligned} \qquad [19]$$

ed allora la [18] è soddisfatta nei punti $y=\pm b$, cioè nei vertici del rettangolo.

Le [17] e [19] sono quattro equazioni tra le quattro costanti k se noi adottiamo soltanto quattro funzioni $f_i(y)$; e già con esse si viene a soddisfare la [16] sui lati paralleli all'asse y, e la [18] in due o tre punti di ogni lato parallelo all'asse x, cioè negli estremi e, se è $\left[\frac{\partial\psi}{\partial x}\right]_{\substack{x=\pm a\\ y=0}}=0$, nel punto di mezzo. Punti particolarmente importanti, di modo che già si può prevedere che, anche con tale approssimazione, la $\frac{\partial\psi}{\partial x}$ si scosterà poco, lungo i lati $x=\pm a$, dai valori $-\frac{yr}{r+y}$. Volendo comunque migliorare l'approssimazione, basta aumentare il numero delle k_i e quindi delle $f_i(y)$.

Si ha intanto, come si è visto,

$$A=-\frac{1}{r}-\frac{3a^2-r^2}{4}+2r\log r$$

che risulta, come si vede, diversa da zero, onde il centro di torsione è sull'asse x a distanza A dal baricentro.

Determinata la ψ, si può calcolare il fattore di torsione q'; risultano allora completamente determinate le τ_{yz}, τ_{zx}.

È facile vedere ora che la condizione $T_y = 0$ è soddisfatta, come avevamo previsto per considerazioni di ordine generale. La

$$T_x = 0$$

può invece soddisfarsi a nostro arbitrio. Con la espressione della $\psi(x, y)$ sopra scritta, essa non sarà in generale soddisfatta, onde le deformazioni e le sollecitazioni corrispondenti saranno quelle relative all'esistenza di un momento torcente e di uno sforzo di taglio parallelo all'asse x. Ma è facile vedere che la $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ è determinata a meno di termini costanti, per quanto riguarda la trattazione che segue: in altre parole, noi possiamo aggiungere all'espressione di essa quanti termini vogliamo, purchè costanti, senza che il problema e la sua soluzione vengono in nulla alterati; e ciò dipende dal fatto che nella [13] la $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ e la A non compaiono. Inoltre la condizione al contorno [16] viene sempre soddisfatta, e la [18] sarà egualmente soddisfatta per approssimazione, determinando le costanti in dipendenza dell'espressione, quale si voglia, della $\frac{\partial \psi}{\partial x}$.

Calcolata quindi l'espressione

$$\int_A \frac{\partial \Psi}{\partial x} dA - r \int_A \frac{y + A}{r + y} dA$$

e supposta che essa risulti diversa da zero, come in generale sarà, basterà aggiungere alla $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ dei termini tali che risulti soddisfatta la

$$\int_A \frac{\partial \Psi}{\partial x} dA - r \int_A \frac{y + A}{r + y} dA = 0$$

il che si fa molto facilmente.

Quella che risulta però diversa, in dipendenza della diversa espressione della $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ è la costante

$$A = \left| \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|_{0,0}$$

che è la coordinata x del centro di torsione. Ciò vuol dire che in corrispondenza di diversi valori di T_x, in particolare anche $T_x = 0$, si hanno

diverse posizioni del centro di torsione, che sarà però sempre sull'asse x, essendo $B = 0$.

Se dunque $T_x = 0$ si ha una sollecitazione di pura torsione, cioè nella sezione in esame agisce soltanto un momento torcente. Dato che però il solido non è ad asse rettilineo, sarà bene precisare se e come ciò possa verificarsi.

Si consideri un tronco del solido compreso tra due sezioni giacenti in piani che facciano tra loro l'angolo φ; a dette sezioni siano applicati due momenti opposti in piani paralleli a quello di mezzeria del tronco. In una sezione generica del tronco si produrranno un momento flettente M_f intorno all'asse y e un momento torcente M_t; e tra tali momenti esisterà la relazione:

$$\frac{\partial M_f}{\partial \varphi} = M_t.$$

Possiamo però sempre considerare una sezione, quella di mezzeria del tronco, in cui esista soltanto il momento torcente e sia quindi nullo il momento flettente; con ciò non veniamo a ledere la generalità, perchè anche nelle altre sezioni potremo scindere l'azione della coppia torcente da quella della flettente, della quale ultima, d'altra parte, si sa tener conto. In definitiva è quindi lecito considerare una sezione soggetta a pura torsione.

D'altra parte invece, servendosi sempre della proprietà suindicata relativa alla $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ si potrà anche rendere nullo il momento torcente, e tener conto soltanto di uno sforzo di taglio diretto secondo l'asse x.

Si noti che dalla trattazione che precede risulta che si può studiare in modo simile il problema della pura torsione e quello della torsione e del taglio agente secondo l'asse x, e quello del solo taglio sempre agente secondo l'asse x. Non così può dirsi per il taglio T_y, data che la sua presenza altererebbe la $\frac{\partial \psi}{\partial y}$ e la relazione fondamentale [13]. Ma d'altra parte di tale taglio si sa tener conto in altro modo. Tuttavia per generalità di trattazione, accenniamo che si potrebbe ancora seguire la via sopra indicata, studiando soltanto una diversa espressione della ψ in modo da soddisfare sempre la [13]. Per soddisfare però le condizioni ai limiti, potrebbero non più verificarsi le [17] o analoghe, onde occorrerebbe determinare le costanti in modo da soddisfare tali condizioni in quanto si vogliano punti su tutti e quattro i lati del rettangolo, o rendere minimo lo scarto lungo i lati stessi. Il problema non presenta, almeno in via teorica, diversità di trattazione.

In ultimo dobbiamo ritornare su una ipotesi fatta in principio. Abbiamo supposto, all'inizio, che sia: $\sigma_x = \sigma_y = 0$. Ora è noto d'altra parte [7]) che, nei

[7]) Ricci C. L., *Complementi alla teoria* cit.

solidi a grande curvatura, quando esistano una σ_z e una τ, è $\sigma_y \neq 0$. Tuttavia occorre osservare che la detta σ_y dipende ed è causata in massima parte dalla σ_z, che nel nostro caso è nulla; resterebbe quindi soltanto da considerare quella parte (certamente minima) della σ_y prodotta dalla variazione della τ.

Riteniamo quindi che sia praticamente lecito ed opportuno trascurare la σ_y. Precisiamo tuttavia che un valore molto approssimato di essa può facilmente ottenersi. Infatti dalla seconda delle equazioni indefinite dell'equilibrio, che diventa ora la seguente:

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \frac{\sigma_y}{r+y} = 0$$

si può calcolare facilmente la σ_y. L'approssimazione consiste quindi soltanto nel trascurare il fatto che ad una $\frac{\partial v}{\partial y}$ relativa alla σ_y, dovrebbe corrispondere una $\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{m}\frac{\partial v}{\partial y}$; per la piccolezza (specie per alcuni materiali) del termine $\frac{1}{m}$, tale $\frac{\partial u}{\partial z}$ può senz'altro trascurarsi.

Con quanto precede riteniamo di aver inquadrato e risolto il problema, senza incorrere in eccessive difficoltà numeriche.

La trattazione può estendersi al caso in cui sia r variabile, con alcune modificazioni che si possono ricavare da quanto sopra si è esposto. Ci ripromettiamo del resto di esporre partitamente tali modifiche in un prossimo lavoro, nel quale riporteremo anche diversi calcoli numerici eseguiti in corrispondenza della soluzione sopra esposta.

Teoremi di confronto per equazioni differenziali lineari del secondo ordine

Nota di **Savino Coronato**, *presentata dal socio* **M. Picone**

(Adunanza del dì 2 marzo 1939 - XVII)

Sunto. — L' A. dimostra, mediante un' opportuna trasformazione, la comune origine dei noti teoremi di confronto, relativi alle equazioni lineari del secondo ordine omogenee, e contemporaneamente mette in rilievo la possibilità di dedurne altri, precisandone due.

1. Teoremi di confronto per equazioni differenziali lineari del secondo ordine se ne conoscono tre:

Uno è il classico di Sturm, che vale per equazioni autoaggiunte.

Un altro, proposto dal Fubini, negli Annali della R. Scuola Normale superiore di Pisa [1]), era, contemporaneamente ed indipendentemente, esposto, in modo più completo [2]), dal prof. Mammana, nel corso di Analisi superiore della R. Università di Catania, indi, a Napoli, nelle lezioni sulla « Teoria delle funzioni », ed inoltre dallo stesso prof. Mammana pubblicato nel trattato sui « Sistemi differenziali » [3]). Tale teorema verrà da me chiamato: Teorema di Fubini-Mammana. Esso vale per equazioni del tipo:

$$y'' + 2py' + qy = 0. \tag{1}$$

Il terzo teorema, stabilito dal Cimmino [4]), vale per equazioni del tipo.

$$my'' + 2py' + qy = 0. \tag{2}$$

Per incitamento del prof. Mammana mi son proposto di studiare più a fondo il problema, allo scopo soprattutto di cercare un' eventuale origine

---

[1]) Fubini G., *Su un teorema di confronto per le equazioni del secondo ordine alle derivate ordinarie.* Annali della R. Scuola Normale superiore di Pisa; serie II; 1933, pag. 283-284.

[2]) Vedi n. 5.

[3]) Mammana G., *Sistemi differenziali. Autovalori ed autofunzioni.* Napoli, Sezione editoriale del GUF.

[4]) Cimmino G, *Teoremi di confronto tra equazioni o sistemi di equazioni defferenziali lineari del secondo ordine.* Rendiconti del Seminario matematico della R. Università di Roma, Serie IV, vol. I, fasc. I, giugno 1936, XIV.

comune di questi teoremi. Ho potuto al riguardo stabilire che tanto i teoremi di Fubini-Mammana e del Cimmino, quanto altri due da me istituiti, riportati nei numeri 6 e 8, possono dedursi, dopo opportune sostituzioni, tutti dal teorema di Sturm.

2. Comincio col richiamare il *teorema di* Sturm, del quale il prof. Picone ha dato un'elegante dimostrazione, deducendolo da un'identità, detta appunto: identità di Picone [5]).

Si abbiano due equazioni del secondo ordine autoaggiunte:

$$\begin{aligned} &(\Theta u')' + \gamma u = 0 \qquad (3a) \\ &(\Theta_1 v')' + \gamma_1 v = 0 \qquad (3b) \end{aligned} \tag{3}$$

con $\Theta, \gamma, \Theta_1, \gamma_1$ funzioni della x, definite in un certo intervallo (a, b). Il teorema di Sturm può enunciarsi così:

« Se x_1 ed x_2 sono due punti dell'intervallo (a, b), coniugati rispetto alla $(3a)$, e se sono verificate le condizioni:

$$\Theta \geq \Theta_1 \quad ; \quad \gamma \leq \gamma_1 \tag{4}$$

in tutto l'intervallo (x_1, x_2), allora non può esistere integrale alcuno della $(3b)$ che si mantenga diverso da zero in ogni punto interno dell'intervallo (x_1, x_2) ».

In altri termini: « Se sono verificate le (4), fra due zeri di un integrale della $(3a)$ cade sempre almeno uno zero di ogni integrale della $(3b)$ ».

Il risultato da me ottenuto è basato sulla seguente semplice osservazione: Ogni equazione, sia del tipo (1), sia del tipo (2), può essere sempre ridotta alla forma delle (3) o moltiplicandone il primo membro per una funzione $\Theta > 0$, oppure operando la sostituzione: $y = \Theta u$, ed, in ambo i casi, determinando Θ in modo che il secondo coefficiente dell'equazione, alla quale si perviene, sia la derivata del primo. Dai diversi modi di determinare questa funzione Θ vengono fuori i diversi teoremi di confronto.

I.

3. In generale, per semplicità, diremo che relativamente a due equazioni sussiste, in determinate condizioni, un teorema di confronto se fra due zeri di un integrale dell'una vi è sempre uno zero di ogni integrale dell'altra.

---

[5]) Picone M., *Sui valori eccezionali di un parametro* ecc. « Annali della R. Scuola Normale superiore di Pisa II (1909), p. 20, f. (7). — Corso di Analisi superiore della R. Università di Catania, vol. I « Equazioni differenziali », pag. 86. Circolo matematico di Catania. — Cfr. Mammana G., Op. cit., pag. 179.

Consideriamo due equazioni (non autoaggiunte) del tipo (1):

$$\begin{aligned} y'' + 2py' + qy &= 0 \qquad (5a) \\ z'' + 2p_1 z' + q_1 z &= 0 \qquad (5b) \end{aligned} \qquad (5)$$

con p, q, p_1, q_1, funzioni della x, continue in certo intervallo (a, b).

Cominciamo col notare che, sotto le condizioni:

$$e^{2\int p dx} \geq e^{2\int p dx} \quad ; \quad qe^{2\int p dx} \leq q_1 e^{2\int p_1 dx}$$

vale per le (5) un teorema di confronto, che non è essenzialmente diverso da quello di STURM.

4. Al teorema di FUBINI-MAMMANA premetto la seguente nozione [6]: Supposta, oltre la continuità in (a, b) dei coefficienti della (1), anche la continuità della derivata prima di p, si dà il nome di «discriminante» dell'equazione differenziale (1), oppure della forma differenziale:

$$y'' + 2py' + qy \qquad (6)$$

all'espressione:

$$J = p' + p^2 - q$$

invariante per la trasformazione $y = \Theta u$ [7].

Il nome discriminante è dovuto al fatto che l'annullarsi di tale espressione dà la condizione necessaria e sufficiente perchè la forma differenziale (6) abbia una radice comune con la sua derivata simbolica

$$2y' + 2p$$

o, ciò che fa lo stesso, la condizione necessaria e sufficiente perchè l'equazione (1) ammetta due integrali il cui rapporto sia lineare nella x.

Ciò premesso, chiamando:

$$J = p' + p^2 - q \qquad \text{ed} \qquad J_1 = p_1' + p_1^2 - q_1$$

i discriminanti rispettivamente della (5a) e della (5b), la condizione del teorema di FUBINI-MAMMANA è:

$$J \geq J_1. \qquad (7)$$

---

[6]) Cfr. MARTIS S., *Sull' Algebra delle forme differenziali.* Rend. dell' Istituto lombardo, 1931, vol. LXIV, fasc. VI-X, pag. 575 ssq.

[7]) FUBINI G., Loc. cit.

Questo teorema si deduce facilmente dal teorema di STURM. Sia l una funzione sempre positiva, continua e con derivate prima e seconda continue in (a, b), del resto arbitraria.

Dopo aver moltiplicato ambedue le (5) per l, si operi su di esse rispettivamente la trasformazione:

$$y = \Theta u \qquad z = \Theta_1 v$$

determinando Θ e Θ_1 in modo da ottenere:

$$2l\Theta' + 2lp\Theta = l'\Theta \quad ; \quad 2l\Theta'_1 + 2lp\Theta_1 = l'\Theta_1$$

ciò che si ottiene ponendo:

$$\Theta = e^{\int \left(\frac{l'}{2l} - p\right) dx} \quad ; \quad \Theta_1 = e^{\int \left(\frac{l'}{2l} - p_1\right) dx}.$$

Operata la trasformazione, le due equazioni ottenute possono essere divise rispettivamente per Θ e Θ_1, ottenendo:

$$\begin{aligned} (lu')' + \gamma u &= 0 \\ (lv')' + \gamma_1 v &= 0 \end{aligned} \tag{8}$$

dove si è posto:

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{l''}{2} - \frac{l'^2}{4l} - lp^2 - lp' + lq = \frac{l''}{2} - \frac{l'^2}{4l} - lJ \\ \gamma_1 &= \frac{l''}{2} - \frac{l'^2}{4l} - lp_1^2 - lp'_1 + lq_1 = \frac{l''}{2} - \frac{l'^2}{4l} - lJ_1. \end{aligned} \tag{9}$$

Le condizioni di STURM per le (8) si riducono in questo caso all'unica:

$$\gamma \leq \gamma_1$$

che, in virtù delle (9), diventa la condizione di FUBINI-MAMMANA (7).

5. Ho detto precedentemente che il prof. MAMMANA ha stabilito il teorema in modo più completo del FUBINI. Difatti, la dimostrazione del FUBINI ci autorizza a dire che, essendo x_1 e x_2 due punti coniugati rispetto alla (5a), e verificata la (7), non può esistere integrale alcuno della (5b) che si mantenga diverso da zero in tutto l'intervallo (x_1, x_2), *estremi inclusi*, ma non ci autorizza ad affermare che la (5b) non può ammettere nemmeno integrale diverso da zero nell'interno di (x_1, x_2) e nullo in uno o in am-

bedue gli estremi. La dimostrazione del prof. MAMMANA, come pure quella precedentemente data, autorizza anche questa seconda affermazione.

6. Sussiste un secondo teorema di confronto, per le (5), sotto le condizioni seguenti:

$$e^{-2\int p\,dx} \geq e^{-2\int p_1 dx} \quad ; \quad (q-2p')e^{-2\int p\,dx} \leq (q_1-2p'_1)\,e^{-2\int p_1 dx} \tag{10}$$

Si operi nelle (5) rispettivamente la trasformazione:

$$y = \Theta u \qquad ; \qquad z = \Theta_1 v$$

determinando Θ e Θ_1 in modo che risulti:

$$2\Theta' + 2p\Theta = \Theta' \qquad ; \qquad 2\Theta'_1 + 2p_1\Theta_1 = \Theta'_1$$

ossia ponendo:

$$\Theta = e^{-2\int p\,dx} \qquad ; \qquad \Theta_1 = e^{-2\int p_1 dx.} \tag{11}$$

Le (5) diventano allora:

$$\begin{aligned} (\Theta u')' + \gamma u &= 0 \\ (\Theta_1 v')' + \gamma_1 v &= 0 \end{aligned} \tag{12}$$

dove è:

$$\gamma = (q - 2p')\,\Theta \qquad ; \qquad \gamma_1 = (q_1 + 2p'_1)\,\Theta_1. \tag{13}$$

Le condizioni di STURM per le (12) diventano le condizioni (10) in virtù delle (11) e delle (13).

II.

7. Consideriamo ora le due condizioni (non autoaggiunte) del tipo (2):

$$\begin{aligned} m y'' + 2p y' + q y &= 0 \qquad (14a) \\ m_1 z'' + 2p_1 z' + q_1 z &= 0 \qquad (14b) \end{aligned} \tag{14}$$

dove m, p, q, m_1, p_1, q_1 sono funzioni della x, supposte continue in un certo

intervallo (a, b), insieme a tutte le derivate che intervengono nei calcoli seguenti. Inoltre m ed m_1 le supporremo sempre diverse da zero, in particolare positive.

Per queste equazioni vale il teorema di confronto di CIMMINO, sotto le condizioni:

$$m \geq m_1$$
$$p' - \frac{1}{2}m'' + \frac{1}{m}\left(p - \frac{1}{2}m'\right)^2 - q \geq p'_1 - \frac{1}{2}m''_1 + \frac{1}{m_1}\left(p_1 - \frac{1}{2}m'_1\right)^2 - q_1 . \quad (15)$$

Per dedurre questo teorema dal teorema di STURM si operi la solita sostituzione, determinando Θ e Θ_1 in modo che risulti:

$$2m\Theta' + 2p\Theta = m'\Theta \quad ; \quad 2m_1\Theta'_1 + 2p_1\Theta_1 = m'_1\Theta_1$$

si ponga cioè:

$$\Theta = e^{\int \frac{m' - 2p}{2m}\,dx} \quad ; \quad \Theta_1 = e^{\int \frac{m'_1 - 2p_1}{2m_1}\,dx}.$$

Le due equazioni che ne risultano possono essere divise rispettivamente per Θ e Θ_1, ottenendosi:

$$\begin{aligned} (mu')' + \gamma u &= 0 \\ (m_1 v')' + \gamma_1 v &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

avendo posto:

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{2}m'' - p' - \frac{1}{m}\left(p - \frac{1}{2}m'\right)^2 + q \\ \gamma_1 &= \frac{1}{2}m''_1 - p'_1 - \frac{1}{m_1}\left(p_1 - \frac{1}{2}m'_1\right)^2 + q_1 . \end{aligned}$$

Queste relazioni ci assicurano che le condizioni di STURM per le (16) si traducono per le (14) nelle condizioni di CIMMINO (15).

8. Deduciamo ancora per le (14) un altro teorema di confronto, che sussiste sotto le condizioni:

$$\begin{aligned} m^2 e^{-2\int \frac{p}{m}\,dx} &\geq m_1^2 e^{-2\int \frac{p_1}{m_1}\,dx} \\ m(m'' - 2p' + q)\, e^{-2\int \frac{p}{m}\,dx} &\leq m_1(m''_1 - 2p'_1 + q_1)\, e^{-2\int \frac{p_1}{m_1}\,dx}. \end{aligned} \quad (17)$$

Si operi nelle (14) la solita sostituzione con:

$$\Theta = e^{\int \frac{m' - 2p}{m} dx} = m\, e^{-2\int \frac{p}{m} dx}.$$
$$\Theta_1 = e^{\int \frac{m'_1 - 2p_1}{m_1} dx} = m_1 e^{-2\int \frac{p_1}{m_1} dx} \qquad (18)$$

in modo cioè da avere:

$$2m\Theta' + 2p\Theta = (m\Theta)' \quad ; \quad 2m_1\Theta'_1 + 2p_1\Theta_1 = (m_1\Theta_1)'.$$

Con questa sostituzione, ponendo:

$$\gamma = m'' - 2p' + q \quad ; \quad \gamma_1 = m''_1 - 2p'_1 + q_1 \qquad (19)$$

le (14) diventano:

$$\begin{aligned} \{(m\Theta)u'\}' + (\gamma\Theta)u &= 0 \\ \{(m_1\Theta_1)v'\}' + (\gamma_1\Theta_1)v &= 0. \end{aligned}$$

Le condizioni di Sturm per queste equazioni sono:

$$m\Theta \geq m_1\Theta_1 \quad , \quad \gamma \leq \gamma_1$$

e queste relazioni, per le (18) e le (19), equivalgono alle (17).

9. Per $m = m = 1$, il teorema di Cimmino si riduce a quello di Fubini-Mammana e l'ultimo si riduce al secondo.

Si verifica però facilmente che tutti questi teoremi di confronto non sono tra loro equivalenti, nel senso che il realizzarsi delle condizioni, sotto le quali vale uno di tali teoremi, non porta come necessaria conseguenza il realizzarsi delle condizioni, sotto le quali sussiste un altro qualunque dei rimanenti teoremi di confronto.

E qui è opportuno notare che, date le ipotesi fatte su m ed m_1, le (14) possono essere ridotte al tipo (1), dividendo la (14a) per m e la (14b) per m_1. In tal modo si possono ad esse applicare i teoremi che valgono per le (1). Riporto le condizioni che si ottengono, perchè possa vedersi che esse differiscono da quelle dei due ultimi teoremi.

a) La condizione del teorema di Fubini-Mammana diventa:

$$\frac{1}{m^2}(mp' - pm' + p^2 - mq) \geq \frac{1}{m_1^2}(m_1p'_1 - p_1m'_1 - p_1^2 - m_1q_1).$$

Si noti che che i discriminanti delle (17) sono dati rispettivamente dalle espressioni in parentesi.

b) Le condizioni del secondo teorema diventano:

$$e^{-2\int \frac{p}{m}\,dx} \geq e^{-2\int \frac{p_1}{m_1}\,dx};$$

$$\frac{1}{m}\left(q-2p'+\frac{2pm'}{m}\right) e^{-2\int \frac{p}{m}\,dx} \leq \frac{1}{m_1}\left(a_1-2p'_1+\frac{2p_1m'_1}{m_1}\right) e^{-2\int \frac{p_1}{m_1}\,dx}.$$

Napoli — R. Università, Gabinetto di Analisi algebrica.

L'ESAME DELLE MATERIE PRIME DA DESTINARSI ALLA PRODUZIONE DI REFRATTARI SILICEI

Nota del socio **G. Malquori** *e dell'ing.* **A. Giannone**

(Adunanza del dì 6 aprile 1939 - XVII)

Sunto. — I quarzi e le quarziti esaminati dagli AA. differiscono fra di loro per il contenuto di impurezze, per le dimensioni dei grani e dei cristalliti, per la presenza di quantità più o meno rilvanti di cemento intergranulare, fattori che influiscono sulla velocità di conversione del quarzo nelle forme a più basso peso specifico: cristobalite, tridimite.

La trasformabilità dei materiali in questione vien rilevata a mezzo di curve termo-dilatometriche ricavate da campioni scaldati per tempi differenti a temperature crescenti.

Ai materiali in questione si richiede oltre che un'appropriata refrattarietà, una buona trasformabilità nel decorso della cottura.

La velocità di conversione del β quarzo nelle varietà a più basso peso specifico (tridimite, cristobalite) è in rapporto, com'è noto, con il tipo della roccia silicea, e precisamente: con le dimensioni dei grani e con quelle dei cristalliti, con la presenza di cemento intergranulare, nonchè con la sua natura chimica.

Disponiamo nel Paese di differenti tipi di roccia silicea (quarzi, quarziti) adoperati per la fabbricazione del refrattario siliceo corrente; si importano invece tuttora dalla Germania e dalla Cecoslovacchia le quarziti a cemento basale (findlingsquartzite), ottimi materiali facilmente trasformabili e pertanto particolarmente apprezzati per la confezione dei refrattari silicei di qualità, ad alta stabilità di volume.

La rapida conversione delle quarziti a cemento basale è connessa con la loro struttura.

Constano infatti di grani di quarzo inglobati da un cemento eminentemente silicioso, contenente altresì dei costituenti adatti ad accelerare la trasformazione termica del quarzo stesso, in quanto capaci di generare, nel corso della cottura, un flusso nel quale l'α quarzo instabile al disopra di 870° è più solubile delle forme stabili a più basso peso specifico, forme stabili che pertanto si separano dal liquido per cristallizzazione.

Appunto alla presenza del cemento uniformemente distribuito si deve la maggiore velocità di conversione nei confronti delle quarziti dove la

quantità di cemento è così esigua che i grani cristallini appariscono a contatto gli uni con gli altri (felsquartzite).

Volendo riprodurre artificialmente gli effetti del cemento intergranulare occorrerebbe aggiungere le sostanze capaci di generare il flusso, ai materiali (quarzi, quarziti ecc.) portati ad un elevato grado di finezza.

L'azione degli « attivatori » della trasformazione termica del quarzo — la di cui aggiunta deve sempre esser contenuta entro limiti al di là dei quali l'abbassamento della refrattarietà ne inibirebbe l'impiego — essendo tanto più efficace quanto più spinta è la finezza del prodotto, si esplica particolarmente sull'aliquota del « fine » che entra nelle distribuzioni granulometriche dei refrattari della pratica, mentre gli elementi « medi » e « grossi », costituenti lo scheletro, risentono solo in superficie dell'effetto acceleratore dovuto al flusso.

Qualora non si possa disporre di materie prime di alto valore — come ad es.: le quarziti su rammentate — e si debbono lavorare dei materiali di minor pregio e utilizzare al massimo le loro possibilità, tendendo all'ottenimento di un buon prodotto senza spostare di troppo — prolungando la durata delle cotture — il bilancio economico del processo di fabbricazione, è necessario conoscere esattamente l'assieme delle caratteristiche tecniche di detti materiali, onde poter procedere ad opportune miscelature, all'aggiunta degli attivatori più adatti, alla scelta di granulometrie appropriate, per modo da destinare agli elementi di maggiori dimensioni i prodotti più facilmente trasformabili nel corso della cottura.

Ne consegue la utilità di sottoporre ad un assieme di accurate prove tecniche — inerenti alla destinazione — le rocce silicee dei differenti tipi e delle diverse provenienze, utilizzate, o presumibilmente destinabili, alla nostra produzione di refrattari. L'utilità di una ricerca del genere risalta ancora più evidente considerando — come si è già accennato in principio — che sebbene le materie prime nazionali coprano quasi totalmente il fabbisogno per la fabbricazione dei silicei correnti, quando si voglia ottenere un prodotto di qualità si deve ricorrere alle quarziti di importazione.

Dette indagini si vengono svolgendo da tempo presso l'Istituto di Chimica farmaceutica della R. Università di Napoli, e sui rispettivi risultati verrà riferito altrove.

Riteniamo utile dar conto qui dei metodi di prova da noi adottati:

a) Refrattarietà, analisi chimica.

Ciascun campione di roccia silicea è sottoposto alla prova pirometrica secondo le norme C. T. I. Si scartano per le prove ulteriori quei materiali le cui deficienze sono tali da non poter essere ammessi alla lavorazione.

b) Tessitura.

L'esame microscopico di sezioni sottili della roccia fornisce pregevoli indicazioni in quanto permette di rilevare: le dimensioni dei grani, l'esi-

stenza di cemento intergranulare, la sua distribuzione, la presenza di costituenti estranei.

Per valutare le dimensioni dei cristalliti [1]) (occorre distinguere fra dimensioni dei grani e dimensioni di cristalliti), nonchè per esaminarne gli eventuali orientamenti, è stato fatto passare un fascio di raggi X monocromatici attraverso una lamina della roccia (0,2 ÷ 0,3 mm. di spessore) raccogliendo l'immagine retrodiffratta a mezzo di una camera per prese Laue.

Dallo spettrogramma così ricavato si risale alle dimensioni dei cristalliti [2]).

Nelle tavole I-III sono riprodotte le microfotografie e gli spettrogrammi dei seguenti materiali:

Campione	SiO_2 %	Refrattarietà C. S.
N. 1	98,82	35 ÷ 36
2	99,07	35 ÷ 36
3	98,91	35
4	96,74	34 ÷ 35
5	97,13	35
6	96,17	34 ÷ 35
7	97,72	35 ÷ 36
8	92,15	29 ÷ 30
9	96,38	34

Si tratta di materiali per lo più di provenienza nazionale; i N. 1 e 2 sono rocce quarzose a grossi cristalli, i N. 4 e 5 delle quarziti estere a cemento basale, il N. 6 è una quarzite di analoga tessitura prelevata a Lagonegro (Lucania) [3]), i N. 7 e 8 sono dei materiali criptocristallini, il N. 9 contiene calcedonio e opale.

c) Trasformabilità.

La successione di trasformazioni rilevabile dal diagramma di equilibrio è la seguente:

$$\beta \text{ Quarzo} \xrightarrow{575^\circ} \alpha \text{ Quarzo} \xrightarrow{870^\circ} \alpha \text{ tridimite} \xrightarrow{1470^\circ} \alpha \text{ cristobalite.}$$

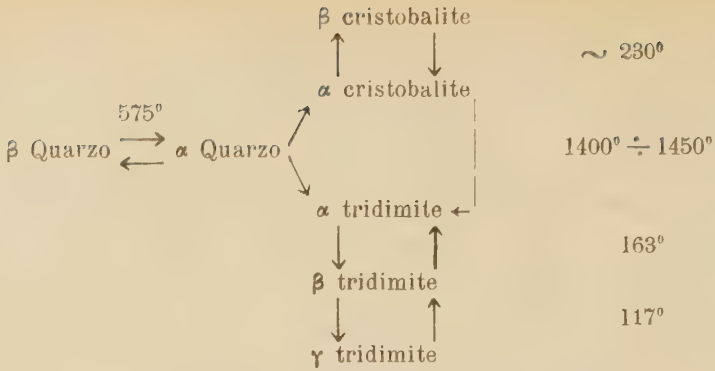
In effetti, le trasformazioni al riscaldamento e al raffreddamento avvengono invece secondo lo schema:

---

[1]) Jay A. H. e Chester J. H., Trans. Cer. Soc. *37*; 209; (1938).

[2]) Böhm J., Kolloid. Zeit. *42*; 276; (1927).

[3]) Dei campioni di quarzite provenienti da Lagonegro furono studiati in passato dal compianto Prof. Rebuffat (Atti del R. Istituto d'Incoraggiamento di Napoli, 1920) che ebbe modo ,di mettere in evidenza la buona trasformabilità di questo materiale.



Com'è noto, la trasformazione di α quarzo in α tridimite è praticamente pseudomonotropa, pertanto nel campo di stabilità dell'α tridimite si presenta metastabile l'α cristobalite che solo lentamente, ad alta temperatura: 1400° ÷ 1450°, si trasforma nella fase stabile: l'α tridimite.

Si usa ordinariamente di valutare il grado di trasformazione raggiunto con la cottura per tempi e per temperature stabiliti, determinando l'entità della diminuzione del peso specifico. Non essendo tuttavia possibile, operando in tal modo, discriminare fra trimidite e cristobalite, quando se ne desideri la distinzione, è necessario procedere al rilevamento dei caratteri morfologici e ottici dei costituenti su sezioni sottili del materiale cotto, oppure all'esame degli spettri di raggi X [1]), (vedi Tav. IV), metodi entrambi che richiedono però un'attrezzatura tecnica specializzata di cui — in genere — non dispongono i laboratori di stabilimento.

Indicazioni sufficienti agli scopi pratici della valutazione in questione sono forniti invece delle curve dilatometriche ricavate a mezzo di un apparecchio di precisione [2]).

Sia per l'esame dei prodotti finiti, sia per l'esame del comportamento alla cottura delle differenti materie prime, adoperiamo il dilatometro differenziale Chevenard a registrazione fotografica.

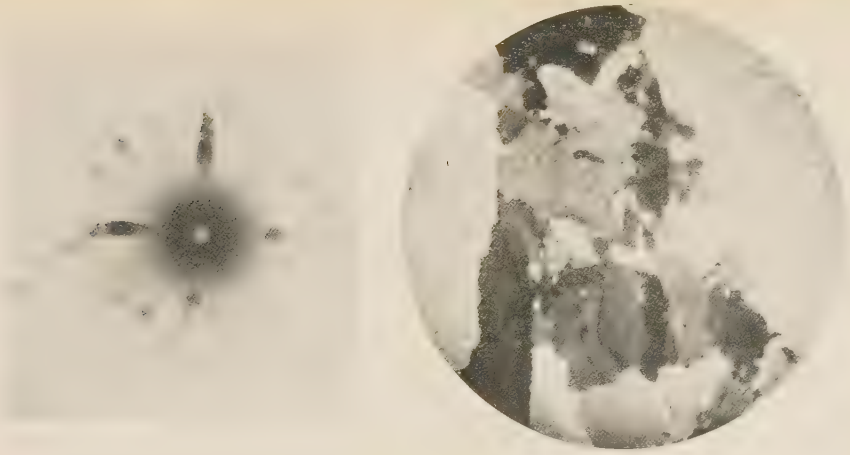
I materiali precedentemente descritti, cotti a temperature e per tempi stabiliti, hanno fornito le curve dilatometriche riprodotte nelle Tav. V e VI.

---

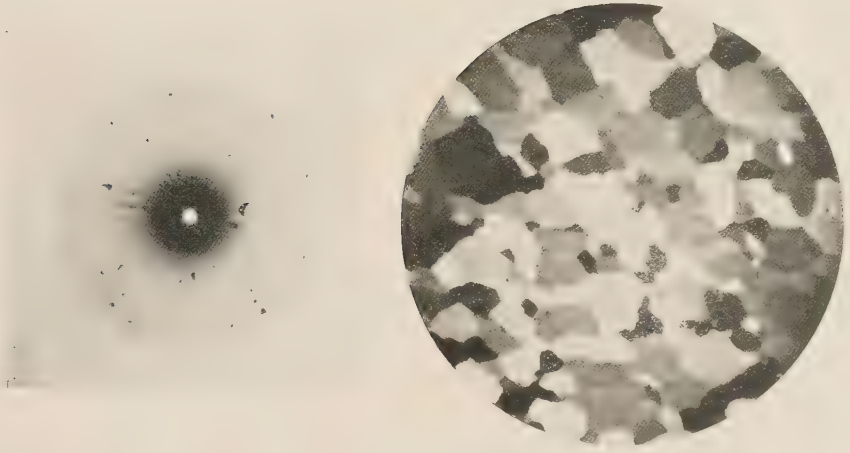
[1]) Jay A. H. e Chester J. H., L. c. — Zwetsch A. e Stumpen H., Ber. Deutsch. Ker. Ges. *10*; 561; (1930). — Kondo S. e Yamauchi T., Journ: Soc. Chem. Ind. Japan, 1935-1938. — Endell K., Hofmann V., Maegdefrau E., Glückauf, *71*; 862; (1935).

[2]) Chevenard, Rev. de Métall. *23*; 92; (1926). — Travers e dr Goloubinoff, Rev. de Métall. *23*; 100; (1926).

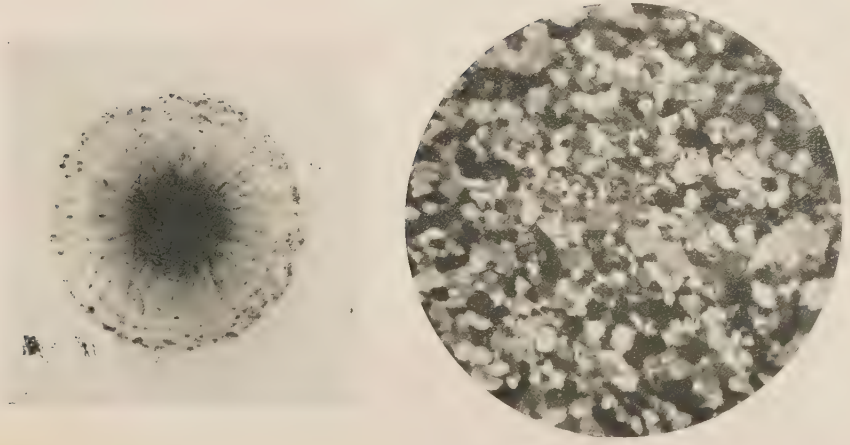
Nicols incrociati (× 27)



1

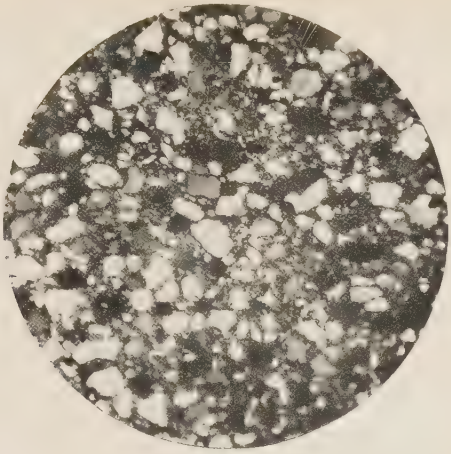


2

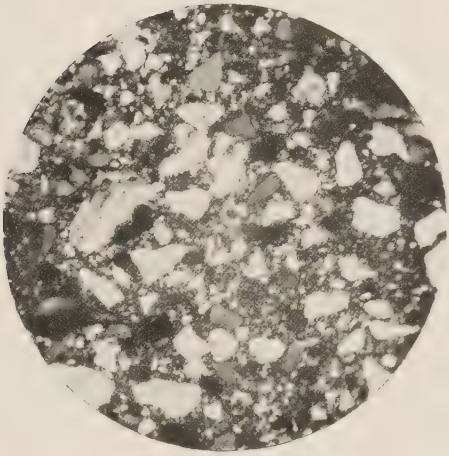


3

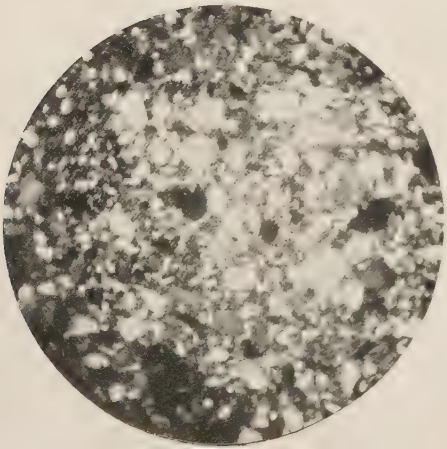
Nicols incrociati (× 27)



4

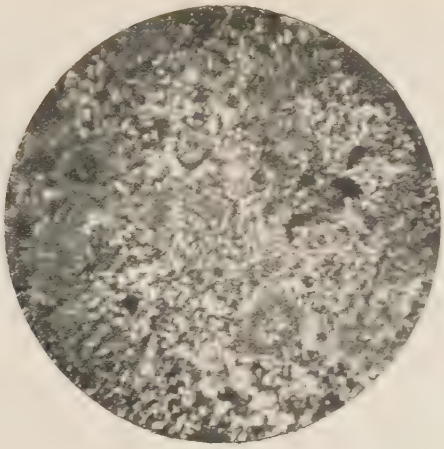


5

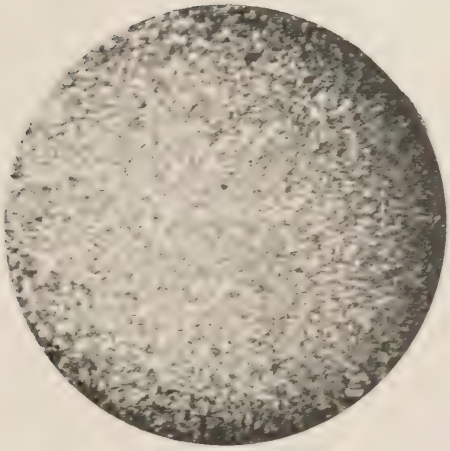


6

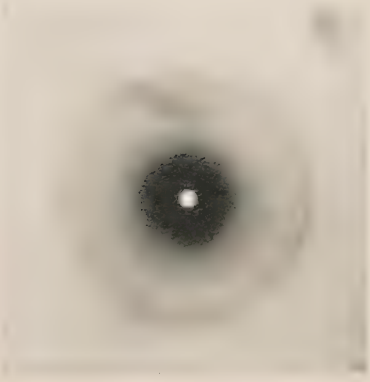
Nicols incrociati (× 27)

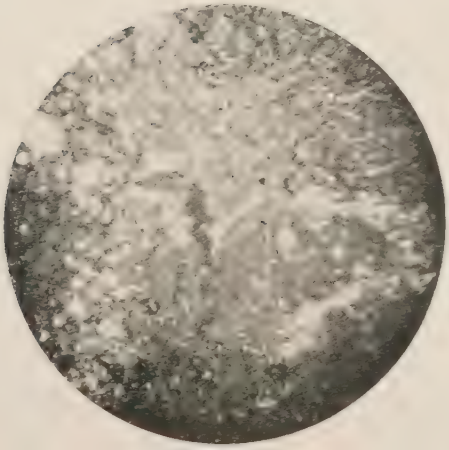


7

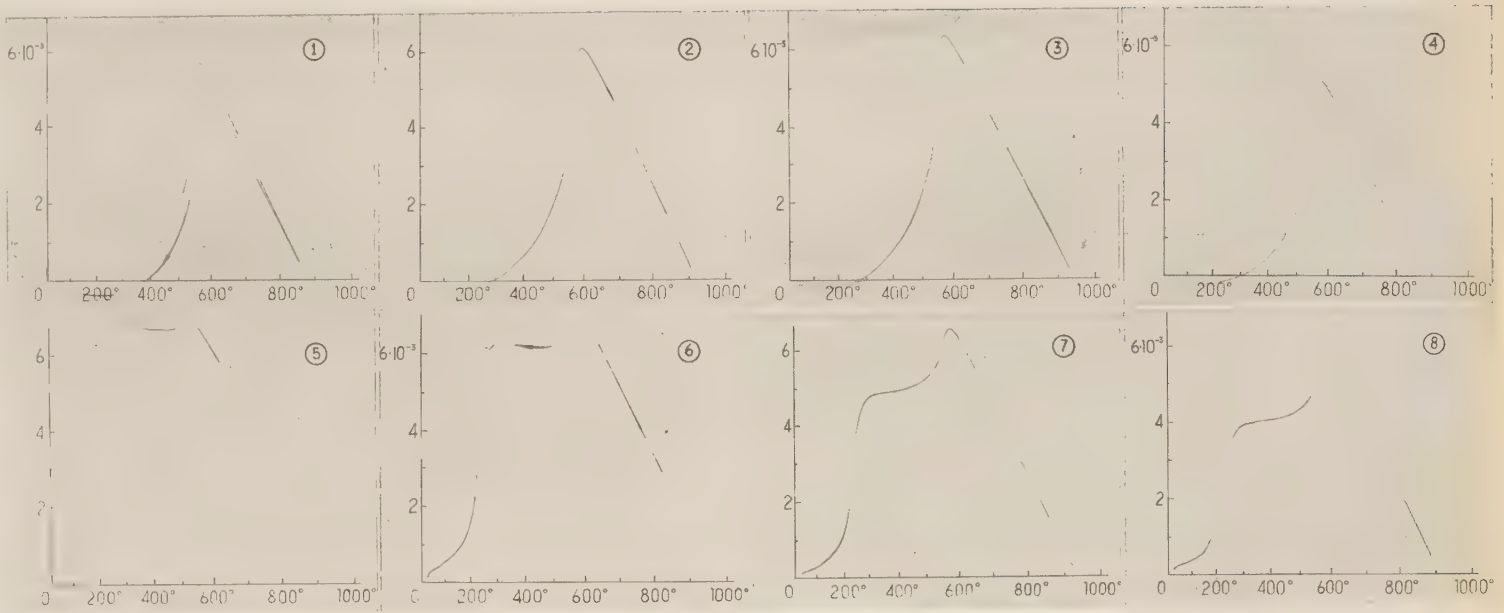


8

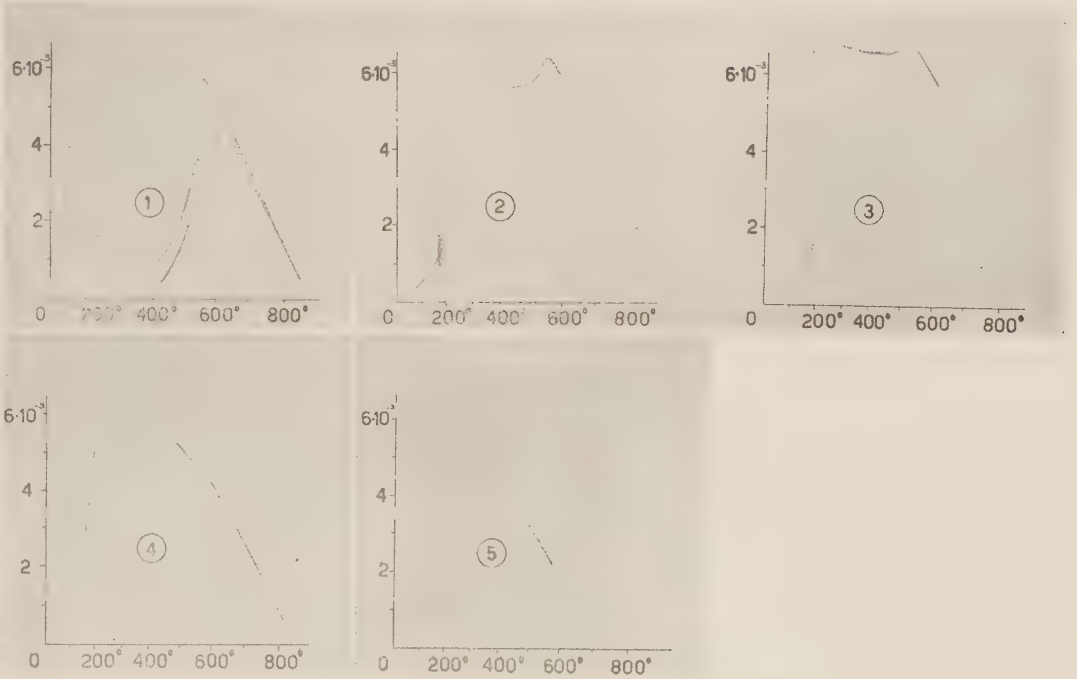




9



1. Materiale N. 8 non trattato
2. » » 4 » »
3. » » 3 » »
4. » » 9 » »
5. Materiale N. 8 trattato per 18 ore a 1300°
6. » » 6 » » 9 » »
7. » » 4 » « » » »
8. » » 7 » » » » »



1. Materiale N. 8 non trattato
2. » » » trattato per 9 ore a 1300°
3. » » » » 18 » »
4. » » » » 80 » »
5. » » » » » » » e successivamente per 9 ore a 1400°

Ciascun provino è stato tagliato dal blocco di roccia. Le differenze di porosità sui cotti non hanno superato il 15 % [1]).

Le curve dei prodotti cotti nelle condizioni indicate, mostrano le due trasformazioni: $\beta \rightleftarrows \alpha$ quarzo e $\beta \rightleftarrows \alpha$ cristobalite, con entità differente a secondo del grado di trasformazione raggiunto. Sono evidenti altresì le relazioni che intercorrono fra velocità di conversione, tessitura, e contenuto di impurezza della roccia.

Nella Tav. VII è riportato l'andamento della trasformazione termica di un provino della quarzite N. 8, a contenuto elevato di impurezze. Dopo cottura per 9 ore a 1300° parte del quarzo è trasformato in cristobalite; tuttavia, nonostante che la dilatazione della cristobalite nella trasformazione $\beta \rightarrow \alpha$ sia superiore a quella che si osserva nella trasformazione $\beta \rightarrow \alpha$ del quarzo, il punto di massimo della curva dilatometrica del prodotto cotto ha all'incirca la stessa ordinata del punto di massimo della curva ricavata dal materiale crudo.

Ora, se il quarzo scomparso si fosse integralmente convertito in cristobalite, la dilatazione massima del provino scaldato dovrebbe risultare superiore a quella misurata per il provino non trattato. (La dilatazione lineare della cristobalite nella trasformazione $\beta \rightarrow \alpha$ è di: 1,05 %, quella del quarzo, nella sua conversione in α, è invece di: 0,77 % [2])).

Il comportamento osservato è dovuto al passaggio di parte dell'α quarzo a silice amorfa, molto meno dilatabile, ed è da questa silice amorfa che prenderebbe origine l'α cristobalite [3]). Il fenomeno risalta ancor più evidente dal confronto delle curve 3 (Tav. V) e 4 (Tav. VI) riferentesi allo stesso materiale N. 3.

Continuando il riscaldamento del provino a 1300° dopo altre 9 ore si nota (Tav. VII) aumento sensibile del suo contenuto di cristobalite, dopo 62 ore, invece, mentre il quarzo è quasi scomparso, al posto di parte della cristobalite subentra della tridimite, con conseguente diminuzione della dilatabilità massima del provino (la dilatazione lineare della tridimite nella conversione: $\gamma \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$ è di 0,26 %). Prolungando ulteriormente la cottura dello stesso campione, ma a temperatura superiore (9 ore a 1400°), la tridimitizzazione prosegue e la dilatazione massima del provino diminuisce.

Da notare infine (Tav. V e VI) il soddisfacente comportamento alla cottura di uno dei campioni criptocristallini, assai puro e pertanto di buona refrattarietà.

La ricerca sui criteri tratteggiati più sopra viene estendendosi a svariati materiali similari di differenti provenienze.

---

[1]) Travers e de Goloubinoff (l. c.) trovano che oscillazioni anche sensibili della porosità non inteferiscono sulla interpretabilità delle curve dilatometriche di materiali dello stesso tipo di quelli che sono oggetto delle nostre ricerche.

[2]) Travers e de Goloubinoff, Rev. Métall. *23*; 42; (1926).

[3]) Travers e de Goloubinoff, l. c.

Sulla magnesite dell' isola d' Elba.

Nota dell' ing. **A. Giannone**, *presentata dal socio* **G. Malquori**

(Adunanza del dì 6 aprile 1939 - XVII)

Sunto. — I risultati delle indagini termiche e röntgenografiche istituite su campioni di magnesite siliciosa dell' Isola d' Elba, allo scopo di definirne la costituzione, permettono di confermare che la silice contenuta in tali materiali è prevalentemente libera e amorfa.

Nel corso di alcune ricerche che si vengono svolgendo presso l'Istituto di Chimica farmaceutica della R. Università di Napoli, intorno alle possibilità di sinterizzazione della magnesia ricavata dalle magnesiti nazionali, ho avuto occasione di studiare dei campioni di magnesite provenienti dall' isola d' Elba.

La magnesite elbana (S. Piero e S. Ilario in Campo) deriva dall' alterazione profonda delle rocce serpentinose costituenti la base della formazione granitica di Monte Capanne [1]). Analogamente alle magnesiti piemontesi (Baldissero, Casellette, Givoletto) originatesi a loro volta dall' alterazione di rocce lerzolitico-serpentinose [2]), contiene discrete percentuali di silice, tanto che in passato [3]) fu ritenuta costituita dall' associazione del carbonato (magnesite) e di un silicato idrato di magnesio (sepiolite).

Il D' Achiardi [4]) considera invece il minerale in questione come del carbonato di magnesio contenente silice libera sotto forma di opale e di calcedonio, nonchè — come impurezze — altri minerali accessori di calcio e di magnesio.

Ho creduto utile di esaminare la magnesite elbana secondo dei metodi di indagine oggi largamente impiegati nella ricerca mineralogica, e precisamente ho sottoposto questo materiale: all' analisi termica, all' analisi termo-dilatometrica, all' esame röntgenografico.

---

[1]) D' Achiardi G., *La formazione della magnesite all' Isola d' Elba.* Atti Soc. Tosc. Sc. Nat., *20*, (1903).

[2]) Piolti, *Sull' origine della magnesite di Casellette (Val di Susa).* Mem. Reale Acc. Sc. Torino, *47*; (1897).

[3]) Grattarola, *Analisi del cosidetto « caolino » dell' Isola d' Elba.* Proc. Verb. Soc. Tosc. Sc. Nat. (1882).

[4]) Loc. cit.

Uno studio impostato su criteri analoghi è stato eseguito recentemente sulle sepioliti da G. Migeon [1]).

Le magnesiti provenienti da due cave denominate: Crocetta e Stabbiali [2]) accusano all'analisi chimica la composizione seguente:

	Crocetta	Stabbiali
Perdita al fuoco	44,53	46,12
SiO_2	11,59	9,01
R_2O_3	1,37	0,63
CaO	1,13	0,98
MgO	40,08	42,02
Non dosato	1,30	1,20

Hanno aspetto farinoso, e corrispondentemente presentano scarsa resistenza meccanica.

a) Analisi termica.

Ho ottenuto le curve di riscaldamento fino a 900° servendomi di un autoregistratore potenziometrico a due termocoppie, una delle quali traccia la curva del forno, l'altra la curva del materiale (gr. 100 per ogni prova).

I due campioni accusano un unico, forte, effetto endotermico a 580° dovuto alla decarbonatazione completa.

b) Analisi termo-dilatometrica.

G. Migeon [3]) ha tracciato le curve dilatometriche di alcune sepioliti, curve dalle quali si rileva che questi minerali dopo una leggera dilatazione fino a circa 150°, si contraggono con velocità differente entro determinati intervalli di temperatura.

Il loro comportamento è del tutto diverso da quello della giobertite studiata con lo stesso dispositivo sperimentale dal medesimo autore, giobertite la cui curva dilatometrica mostra invece una leggera dilatazione fino a 500°, dopodichè si osserva una contrazione brusca.

Per rilevare le curve termo-dilatometriche delle magnesiti elbane mi sono servito del dilatometro differenziale Chevenard a registrazione fotografica. La velocità di riscaldamento è stata fissata in 200° per ora.

Nella fig. 1 sono riprodotti due degli originali delle curve suddette.

Esse pongono in evidenza, per entrambi i campioni, una lieve dilata-

---

[1]) *Contribution à l'étude de la definition des sépiolites.* Bull. Soc. Franç. Min., 59; 6; (1936).

[2]) La magnesite si presenta nella roccia alterata in un reticolato di vene bianche dello spessore massimo di $10 \div 15$ cm. La roccia viene abbattuta allo scoperto; si procede sui piazzali alla cernita a mano del materiale utile. La produzione anche in passato è stata limitatissima; attualmente l'attività delle cave è sospesa.

[3]) Loc. cit.

zione dalla temperatura ordinaria fino a 250° ÷ 300°, temperatura dalla quale fino a 520° ÷ 560° aumenta la dilatabilità del materiale presentandosi poi una fortissima contrazione [1]).

Il comportamento della magnesite elbana è pertanto simile a quello della giobertite studiata da Migeon, e nessuno indizio della presenza di sepiolite può rilevarsi sulla scorta delle curve dilatometriche.

L'incremento della dilatazione che precede la brusca caduta della curva dilatometrica lo si deve attribuire all'inizio della decarbonatazione [2]).

Ho confermato l'ipotesi di cui sopra mantenendo le magnesiti elbane per otto ore a 400° ± 10° in muffola munita di termoregolatore.

Le perdite di peso dopo detto trattamento sono elencate qui di seguito:

Crocetta	Stabbiali
11,7 %	12,5 %

Riferisco infine, che l'analisi termo-dilatometrica del prodotto decarbonatato non mi ha indicato la presenza di quarzo [3]).

Ho confrontato il comportamento delle magnesiti elbane con quello di altre magnesiti toscane, compatte, povere di SiO_2.

La provenienza dei nuovi materiali e la loro composizione sono indicate nella seguente tabella:

	Perdita al fuoco	SiO_2	R_2O_3	CaO	MgO	Non dosato
N. 1 — Querceto Val d'Elsa	53,19	0,31	0,93	1,38	43,09	1,10
N. 2 — Montefuroli	52,69	0,90	1,81	1,12	42,18	1,20
N. 3 — Castiglioncello	51,87	2,15	1,21	2,26	41,41	1,10

La curva termica mostra per le tre magnesiti un unico effetto endotermico alle temperature di:

N. 1	610°
N. 2	620°
N. 3	610°

[1]) Col dilatometro differenziale Chevenard le variazioni di lunghezza del materiale in esame vengono confrontate con quelle, note, di un provino di paragone (pyros). La retta OA corrisponde alla dilatazione del provino campione, corrisponde cioè ad una dilatazione nulla della sostanza in esame; pertanto i tratti di curva al disotto di OA indicano contrazione, quelli al disopra dilatazione.

[2]) Andamento analogo presenta la curva di un calcare a grana fine studiato con lo stesso dispositivo da A. Portevin e P. Chevenard. (VIII^{e} Congrès Chim. Ind., 1928).

[3]) Com'è noto, la trasformazione $\beta \rightleftarrows \alpha$ del quarzo a 575° è accompagnata da notevole variazione di volume.

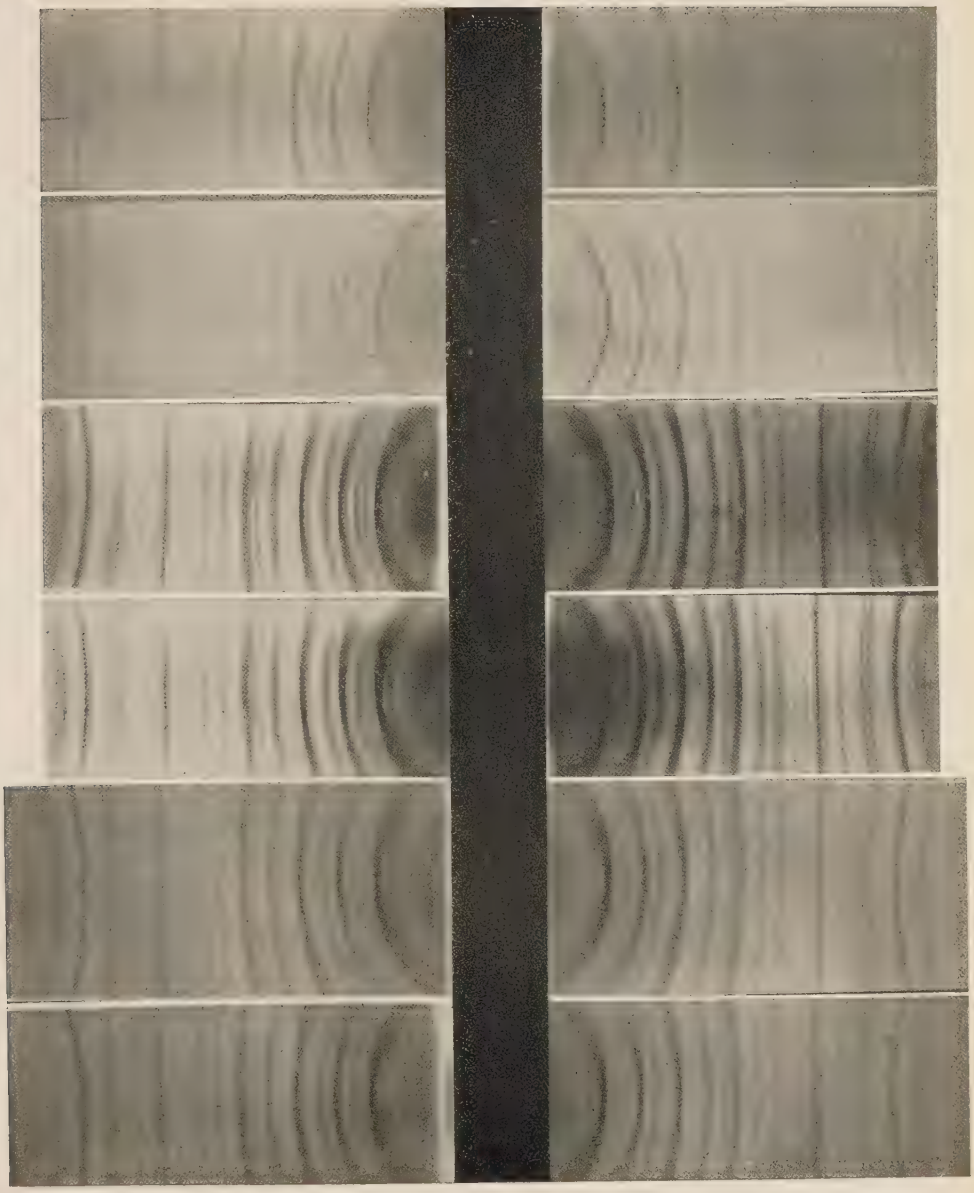


Fig. 3. — (Dall' alto verso il basso):

1 — Magnesite di Frankenstein
2 — » » Quarceto Val d' Elsa
3 — » » Monterufoli
4 — Magnesite di Castiglioncello
5 — » elbana — Cava Crocetta
6 — » » — Cava Stabbiali

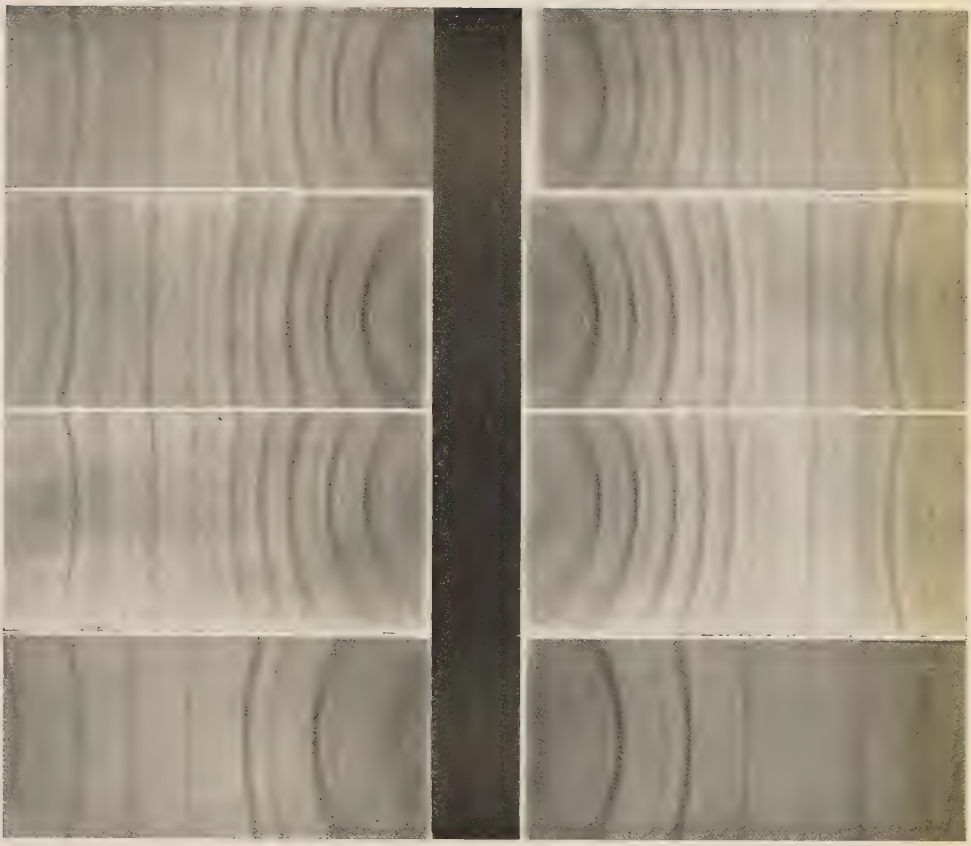


Fig. 4. — (Dall' alto verso il basso): Magnesite elbana — Cava Crocetta:

N. 1 — non trattata
N. 2 — trattata per 8 ore a 200°
N. 3 — » » » » 400°
N. 4 — » » » « 500°

Le curve dilatometriche (fig. 2) accusano fra 250° e 300° l'incremento di dilatazione già osservato per i campioni elbani. La temperatura a cui si ha la contrazione repentina è solo di poco superiore: 580° ÷ 600°.

Le perdite di peso a 400° ± 10° per 8 ore, sono dello stesso ordine di grandezza di quelle trovate per i due campioni: Crocetta e Stabbiali:

	Perdita a 400° ± 10° per 8 ore
N. 1	11,47 %
N. 2	6,83 %
N. 3	13,13 %

c) Esame röntgenografico.

Nella fig. 3 sono riportati gli spettrogrammi delle diverse magnesiti, ricavati con il metodo delle polveri.

Ho adoperato un tubo ad anticatodo di rame: $K\alpha$ Cu = 1,539 Å, una camera circolare: 2R = 57 mm., lavorando con 45 K.V e 12 mA, con una durata di esposizione di 45'.

Insieme con gli altri è riportato lo spettro di una magnesite macrocristallina (magnesite di Frankenstein) cortesemente fornitami dall' Istituto di Mineralogia della R. Università.

Il confronto dei diversi spettrogrammi mostra l'identità dei minerali delle differenti provenienze.

Ho voluto inoltre seguire con lo stesso metodo d'indagine l'evoluzione termica delle magnesiti elbane, e nella fig. 4 sono riprodotti gli spettrogrammi ottenuti dal materiale proveniente dalla cava « Crocetta » scaldato per 8 ore alle temperature di: 200°, 400°, 500°.

Lo spettro resta inalterato anche dopo il riscaldamento a 400°. Non è possibile cioè poter rilevare in tal modo la piccola quantità di ossido di magnesio — estremamente disperso — che prende origine nella decarbonatazione incipiente a questa bassa temperatura.

Lo spettro dell'ossido di magnesio appare invece nettissimo dopo il riscaldamento a 500°.

L'assieme dei risultati ricavati con la sperimentazione di cui ho dato conto nel corso della nota, converge nel confermare l'interpretazione data dal D' Achiardi alla costituzione delle magnesiti elbane.

La silice che vi si ritrova in percentuale cospicua è prevalentemente libera e amorfa (opale).

Napoli, Istituto di Chimica farmaceutica della R. Università.

Sulla decomposizione del premio nell'assicurazione vita.

Nota del prof. **Luigi Lordi**, *presentata dal socio corrisp.* **G. Andreoli**

(Adunanza del dì 4 maggio 1939 - XVII)

Sunto. — L'A., riferendosi ad una assicurazione mista generale, trasforma la equazione che, pel principio di equivalenza, verifica il premio, mostrando come la sua risoluzione possa ricondursi a quella di una equazione dello stesso tipo, ma che traduce un problema di pura capitalizzazione, e di una equazione integrale di Volterra di II specie che, per la forma particolare del nucleo, si riduce ad una equazione differenziale lineare. Tali trasformazioni dell'equazione del premio portano a stabilire direttamente le componenti di risparmio e di rischio, senza fare uso di altri concetti attuariali.

Com'è noto, il premio nell'assicurazione vita si decompone in premio di risparmio e premio di rischio avvalendosi della relazione ricorrente, di Fouret, che lega le riserve costituite alla fine di due anni successivi; oppure, nel continuo, mediante l'equazione differenziale, di Thiele, della riserva matematica. Così, nella comune assicurazione di forma mista generale, il premio di risparmio risulta definito come il termine di rendita *certa* costitutivo della riserva matematica, ed il premio di rischio come il premio naturale del capitale sotto rischio, cioè della differenza tra la somma assicurata e la riserva matematica.

M. Iacob, in un lavoro pubblicato recentemente, ha ripreso la indicata decomposizione [1]), ponendosi la questione di arrivare *direttamente*, senza avvalersi della riserva matematica, alla determinazione del premio di risparmio, ed ha mostrato come questo risulta definito da un sistema di equazioni lineari, nel discontinuo; oppure da un'equazione integrale di Volterra, nel continuo.

Le considerazioni di Iacob sono state estese, successivamente, ad una più generale forma di assicurazione da C. Epstein [2]).

Analizzando il lavoro di Iacob si vede che in esso non si tocca, invero, il fondo della questione sollevata, perchè all'equazioni che definiscono direttamente il premio di risparmio vi si giunge effettivamente attraverso la considerazione della riserva matematica.

[1]) Iacob M., *Sulle equazioni del premio di risparmio*, « Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari », Anno VIII, n. 2; aprile 1937-XV, pag. 105-111.

[2]) Epstein C., *Sul premio di risparmio nelle assicurazioni vita*, « Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari », Anno IX, n. 1; gennaio 1938-XVI, pag. 94-103

In questa Nota seguendo l'idea di Iacob, di stabilire i concetti di premio di rischio e di risparmio *indipendentemente dalla riserva matematica*, *mostreremo come ad essi si possa giungere trasformando semplicemente la nota relazione che, per il principio di equivalenza, lega le prestazioni dell' assicurato e dell' assicuratore: senza effettivamente avvalersi di altri concetti attuariali.*

Stabiliremo, in sostanza, le indicate componenti di rischio e di risparmio trasformando, opportunamente, l' equazione (integrale) da cui dipende la determinazione del premio di assicurazione. E le considerazioni che faremo mettono in altra luce la struttura del premio.

1. Consideriamo, nel continuo, un' assicurazione di forma mista generale, temporanea di n anni, consistente nell' impegno da parte dell' assicuratore di pagare il capitale $U(t)$ se l' assicurato, di età x all' inizio del contratto, muore all' età $x+t$, e di liquidare l' importo S se l' assicurato vive alla scadenza n della durata contrattuale.

L' assicurato s' impegni al pagamento di un premio continuo di intensità $P(t)$ al tempo t.

La capitalizzazione finanziaria sia la composta continua al tasso istantaneo d' interesse $\rho(t)$, $\rho(t) > 0$, al tempo t.

Indicato con $\mu(x+t)$, $\mu(x+t) > 0$, il tasso istantaneo di mortalità all' età $x+t$, supponiamo che le funzioni $U(t)$, $P(t)$, $\rho(t)$, $\mu(x+t)$ siano continue nell' intervallo (o, n) della variabile reale t.

Ciò posto, per il noto principio di equivalenza, l' intensità $P(t)$ del premio di assicurazione deve verificare l' equazione

$$\int_0^n P(t)\, e^{-\int_0^t \left(\rho(\tau)+\mu(x+\tau)\right) d\tau}\, dt =$$

(1)

$$= \int_0^n U(t)\,\mu(x+t)\, e^{-\int_0^t \left(\rho(\tau)+\mu(x+\tau)\right) d\tau}\, dt + S\, e^{-\int_0^n \left(\rho(\tau)+\mu(x+\tau)\right) d\tau}.$$

Tenendo presente la seguente identità [3]), di immediato significato attuariale,

---

[3]) Per la supposta continuità della funzione $\mu(x+t)$, si ha

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}\, e^{\int_t^\sigma \mu(x+\tau)\, d\tau} = \mu(x+\sigma)\, e^{\int_t^\sigma \mu(x+\tau)\, d\tau},$$

$$(2) \qquad e^{\int_t^n \mu(x+\tau)\,d\tau} = 1 + \int_t^n \mu(x+\sigma)\, e^{\int_t^\sigma \mu(x+\tau)\,d\tau}\, d\sigma,$$

la (1) si scrive

$$S = \int_0^n \big(P(t) - U(t)\,\mu(x+t)\big)\, e^{\int_t^n (\rho(\tau)+\mu(x+\tau))\,d\tau}\, dt =$$

$$= \int_0^n \big(P(t) - U(t)\,\mu(x+t)\big)\, e^{\int_t^n \rho(\tau)\,d\tau} \Big(1 + \int_t^n \mu(x+\sigma)\, e^{\int_t^\sigma \mu(x+\tau)\,d\tau}\, d\sigma\Big)\, dt,$$

oppure

$$(3) \qquad S = \int_0^n \big(P(t) - U(t)\,\mu(x+t)\big)\, e^{\int_t^n \rho(\tau)\,d\tau}\, dt +$$

$$+ \int_0^n \big(P(t) - U(t)\,\mu(x+t)\big)\, e^{\int_t^n \rho(\tau)\,d\tau}\, dt \int_t^n \mu(x+\sigma)\, e^{\int_t^\sigma \mu(x+\tau)\,d\tau}\, d\sigma.$$

nvertendo le integrazioni, il precedente integrale doppio diviene

$$\int_0^n \mu(x+\sigma)\,d\sigma \int_0^\sigma \big(P(t) - U(t)\,\mu(x+t)\big)\, e^{\int_t^n \rho(\tau)\,d\tau + \int_t^\sigma \mu(x+\tau)\,d\tau}\, dt,$$

---

da cui

$$\int_t^n \mu(x+\sigma)\, e^{\int_t^\sigma \mu(x+\tau)\,d\tau}\, d\sigma = e^{\int_t^n \mu(x+\tau)\,d\tau} - 1,$$

che è appunto l'identità (2).

che può anche scriversi

$$\int_0^n \mu(x+\sigma)\, e^{\int_\sigma^n \rho(\tau)\,d\tau}\, d\sigma \int_0^\sigma \big(P(t) - U(t)\,\mu(x+t)\big)\, e^{\int_t^\sigma (\rho(\tau)+\mu(x+\tau))\,d\tau}\, dt$$

Dalla (3), tenuto presente quest' ultimo risultato, si ha

$$S = \int_0^n e^{\int_t^n \rho(\tau)\,d\tau} \Big\{ P(t) - U(t)\,\mu(x+t) + \tag{4}$$

$$+ \mu(x+t) \int_0^t \big(P(\sigma) - U(\sigma)\,\mu(x+\sigma)\big)\, e^{\int_\sigma^t (\rho(\tau)+\mu(x+\tau))\,d\tau}\, d\sigma \Big\}\, dt,$$

che, posto

$$P^{(s)}(t) = P(t) - \mu(x+t)\Big\{U(t) - \int_0^t \big(P(\sigma) - U(\sigma)\,\mu(x+\sigma)\big)\, e^{\int_\sigma^t (\rho(\tau)+\mu(x+\tau))\,d\tau}\, d\sigma\Big\}, \tag{5}$$

diviene

$$S = \int_0^n P^{(s)}(t)\, e^{\int_t^n \rho(\tau)\,d\tau}\, dt. \tag{6}$$

Dunque, ogni funzione continua $P(t)$ verificante la (1) fornisce mediante la (5) una funzione continua $P^{(s)}(t)$ che verifica la (6).

E reciprocamente se $P^{(s)}(t)$ è una funzione che verifica la (6) e $P(t)$ verifica (5), la la stessa $P(t)$ verificherà la (1). Ma siccome la (5) una volta *assegnata* la $P^{(s)}(t)$, continua, *determina* la funzione continua $P(t)$, (essendo la (5) una equazione integrale di Volterra di II^a specie), possiamo dire che ogni funzione continua $P^{(s)}(t)$ verificante la (6) fornisce mediante la (5) *una* funzione continua $P(t)$ che verifica la (1).

Per la determinazione della $P(t)$ dalla (5), quando è assegnata la $P(t)$, notiamo che per la forma particolare del nucleo,

$$\mu(x+t)\, e^{\int_{\sigma}^{t} \left(\rho(\tau)+\mu(x+\tau)\right) d\tau},$$

scindibile nel prodotto di una funzione della sola variabile t,

$$\mu(x+t)\, e^{\int_{0}^{t} \left(\rho(\tau)+\mu(x+\tau)\right) d\tau},$$

per una funzione della sola variabile σ,

$$e^{-\int_{0}^{\sigma} \left(\rho(\tau)+\mu(x+\tau)\right) d\tau},$$

la risoluzione dell'equazione integrale (5) può ridursi alla risoluzione di un'equazione differenziale lineare, senza introdurre altre ipotesi sulle funzioni considerate, oltre la supposta continuità [4]).

Infatti, posto

$$(7) \qquad \Psi(t) = \int_{0}^{t} \left(P(\sigma) - U(\sigma)\,\mu(x+\sigma)\right) e^{-\int_{0}^{\sigma} \left(\rho(\tau)+\mu(x+\tau)\right) d\tau} d\sigma$$

da cui

$$(8) \qquad P(t) = U(t)\,\mu(x+t) + \frac{d\Psi(t)}{dt}\, e^{\int_{0}^{t} \left(\rho(\tau)+\mu(x+\tau)\right) d\tau},$$

la (5) diviene

[4]) In un mio lavoro, in corso di pubblicazione nel « *Giornale dell' Istituto Italiano degli Attuari* », in cui mi occupo dell'assicurazione mista *in regime generale di capitalizzazione*, noto che quando in particolare la legge di capitalizzazione è *scindibile*, nel senso di CANTELLI, l'equazione integrale del premio di risparmio si riduce ad un' equazione differenziale in maniera analoga a quella ora considerata.

$$(9) \qquad \frac{d\Psi(t)}{dt} + \mu(x+t)\,\Psi(t) = P^{(s)}(t)\; e^{-\int_0^t (\rho(\tau)+\mu(x+\tau))\,d\tau}$$

Moltiplicando la precedente per $e^{\int_0^t \mu(x+\tau)\,d\tau}$, si ha

$$\frac{d}{dt}\left(\Psi(t)\; e^{\int_0^t \mu(x+\tau)\,d\tau}\right) = P^{(s)}(t)\; e^{-\int_0^t \rho(\tau)\,d\tau},$$

ed integrando nell'intervallo $(0, t)$, tenendo presente che per la (7) deve essere $\Psi(0) = 0$,

$$\Psi(t) = e^{-\int_0^t \mu(x+\tau)\,d\tau} \int_0^t P^{(s)}(\sigma)\; e^{-\int_0^\sigma \rho(\tau)\,d\tau}\,d\sigma,$$

che sostituito nella (8) fornisce [5])

$$(10) \qquad P(t) = P^{(s)}(t) + \mu(x+t)\left(U(t) - \int_0^t P^{(s)}(\sigma)\; e^{\int_\sigma^t \rho(\tau)\,d\tau}\,d\sigma\right) = P^{(s)}(t) + P^{(r)}(t),$$

avendo posto

$$(11) \qquad P^{(r)}(t) = \mu(x+t)\left(U(t) - \int_0^t P^{(s)}(\sigma)\; e^{\int_\sigma^t \rho(\tau)\,d\tau}\,d\sigma\right).$$

Da *ogni* soluzione continua $P^{(s)}(t)$ della (6), determinando la $P^{(r)}(t)$ con la (11) e ponendo $P(t) = P^{(s)}(t) + P^{(r)}(t)$ si ottiene una soluzione continua $P(t)$ della (1). E le stesse considerazioni fatte mostrano che in questa maniera si hanno *tutte* le soluzioni continue della (1).

[5]) La (10) che *determina* $P^{(s)}(t)$ quando è noto $P(t)$ è stata assunta da M. Iacob, nel citato lavoro, per definire in maniera diretta la funzione $P^{(s)}(t)$ (intensità del premio di risparmio): confrontare le osservazioni da noi fatte all'inizio di questa Nota.

Se infatti $P(t)$ è una *assegnata* soluzione della (1), volendola ottenere nella maniera indicata si prenderà come soluzione della (6) la $P^{(s)}(t)$ data dalla (5).

Dunque *ogni soluzione* $P(t)$ *della* (1) *risulta, così, somma di due funzioni:* $P^{(s)}(t)$ *che è una soluzione della* (6) *e* $P^{(r)}(t)$ *data dalla* (11). La componente $P^{(s)}(t)$ prende il nome di intensità del premio di risparmio, e l'altra componente $P^{(r)}(t)$ prende il nome di intensità del premio di rischio.

Ottenuto così in maniera diretta, *basandosi esclusivamente sul principio di equivalenza e senza avvalersi effettivamente di altri concetti attuariali* la decomposizione del premio di assicurazione, è facile vedere come le stesse trasformazioni considerate portino, immediatamente, a stabilire le relazioni che legano le indicate componenti del premio alla riserva matematica.

Notiamo, infine, che il procedimento che abbiamo seguito nell'ipotesi che tanto le prestazioni dell'assicuratore come quelle dell'assicurato varino con continuità, è applicabile, senza modificazioni, nel discontinuo, cioè nella pratica attuariale. E sulla possibilità di unificare le due trattazioni, mediante un opportuno uso dell'integrale di STIELTJES, contiamo di occuparci in una prossima Nota.

Sulla prospettiva (conica e cilindrica) delle superficie di rotazione.

Nota dell' ing. **M. Giovanardi**, *presentata dal socio* **G. Scorza**

(Adunanza del dì 4 maggio 1939 - XVII)

Sunto. — In questa nota esponiamo dei modi abbastanza semplici per rappresentare le prospettive coniche e cilindriche di superficie di rotazione determinando all' uopo le proiezioni ortogonali su un piano orizzontale e le altezze rispetto al piano medesimo dei singoli punti appartenenti alle curve di contatto dei coni e dei cilindri circoscritti alle superficie medesime, e ciò nei casi nei quali il vertice di detti coni sia un centro di vista (prospettiva conica) e le generatrici dei cilindri siano ortogonali od oblique rispetto al quadro della rappresentazione (prospettiva cilindrica ortogonale od obliqua).

In una nostra precedente nota pubblicata nel Rendiconto della R. Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli (serie 4.ª vol. III, 1933-XII) sotto il titolo « *Sulla prospettiva delle superficie di rotazione* » esponevamo il modo come rappresentare la prospettiva conica di queste superficie ricorrendo ad una opportuna combinazione del metodo della proiezione centrale e di quello di Monge. Per tale rappresentazione occorreva però eseguire le molteplici costruzioni grafiche in un unico foglio di disegno non potendosi scindere le une dalle altre. Con la presente nota invece ci proponiamo di semplificare detta rappresentazione separando alcune costruzioni che sono opportune anche per ricavare le prospettive medesime in una scala grafica differente da quella adottata per le proiezioni orizzontali e le sezioni meridiane assegnate delle superficie considerate.

Tratteremo la questione proposta dapprima per la prospettiva conica e poi per quella cilindrica sia ortogonale che obliqua.

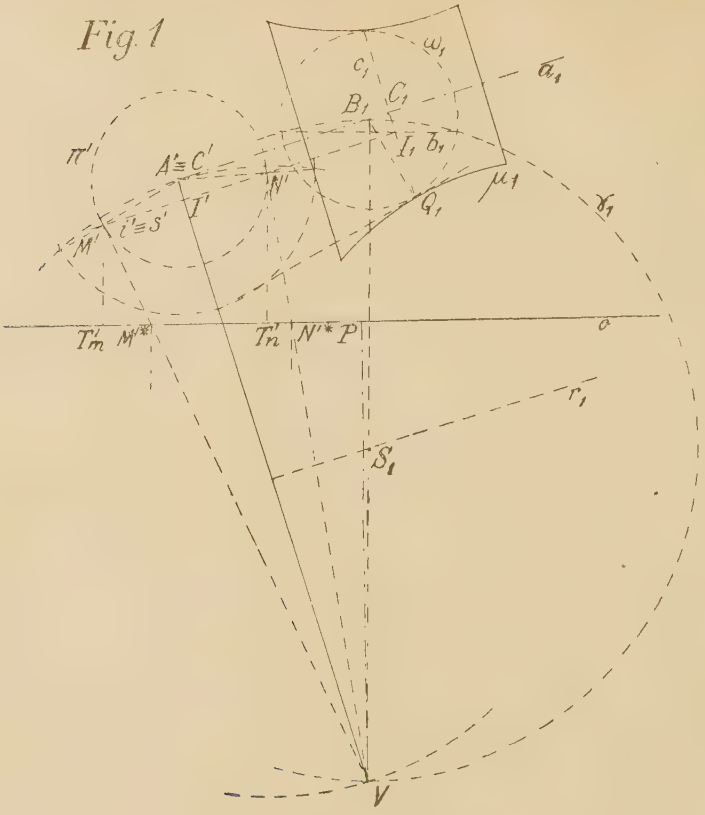
Prospettiva conica.

La prospettiva conica di una superficie Σ di rotazione si ottiene determinando la curva λ di contatto del cono ad essa circoscritto col vertice in un centro di vista V; la prospettiva di tale curva, contorno apparente della superficie rispetto al punto V, rappresenta la prospettiva della superficie Σ. Tale superficie, come è noto, si può considerare sia come inviluppo di sfere che di coni tangenti lungo i paralleli.

Se si considera Σ come inviluppo di sfere ad essa tangenti lungo i paralleli π occorre determinare i cerchi φ lungo i quali le diverse sfere sono

toccate dai coni di vertice il centro di vista V ad esse circoscritti. I cerchi π e φ hanno, in generale, una corda s in comune nei cui punti estremi i

Fig. 1



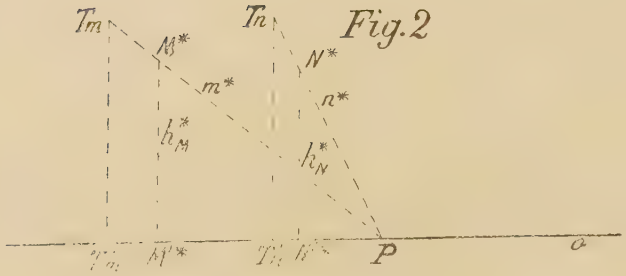


Fig. 2

piani tangenti a Σ, essendo anche tangenti alle sfere medesime, passano per V, e conseguentemente detti punti appartengono alla curva λ richiesta. Di questi punti si determinano facilmente le proiezioni ortogonali sul piano

α condotto per V perpendicolarmente all'asse di Σ, e, conoscendo inoltre le distanze degli stessi dal piano medesimo, si hanno gli elementi necessari per determinarne le prospettive col metodo delle altezze.

La superficie Σ di rotazione, della quale vogliamo costruire la prospettiva, sia definita dal suo asse a verticale e da un suo meridiano. Sia A' (fig. 1) il punto di incontro di a col piano ad esso normale condotto pel centro di vista V, che dista dal quadro della rappresentazione prospettica, anche verticale, del segmento VP, distanza principale, essendo di conseguenza il punto principale P sulla retta o, linea di orizzontè, ovvero intersezione del piano α col quadro.

Per ottenere le prospettive di due punti M, N della curva λ appartenenti al parallelo π di Σ avente per centro C su a determiniamo la sfera Ω tangente a Σ lungo π, e sia φ il cerchio lungo il quale Ω è toccata dal cono di vertice il centro di vista V. Il piano meridiano σ di Σ passante per V contiene: l'asse a, un meridiano μ di Σ, un diametro di π posto in una corda c di μ perpendicolare all'asse a, un cerchio massimo ω di Ω avente il centro nel punto B in cui la normale a μ in uno dei punti $Q \equiv c\mu$ incontra l'asse e per raggio BQ, ed infine un diametro del cerchio φ posto nella corda b comune a φ ed al cerchio γ che ha VB per un diametro. Il centro S di γ si trova sulla retta r parallela all'asse a, equidistante da a e da V e fissa al variare della sfera Ω.

Da quanto si è esposto risulta evidente che per determinare i punti M, N di λ, punti in simmetria ortogonale rispetto al piano σ, occorre eseguire le diverse costruzioni, eccetto una, nel medesimo piano σ, qualunque sia il parallelo che si consideri. La sola costruzione da eseguirsi fuori di questo piano è quella relativa allo staccare da ciascun lato del punto $I \equiv bc$ sulla retta i perpendicolare a σ condotta per il punto medesimo un segmento eguale alla metà della corda s comune a π e φ.

Per le costruzioni da eseguirsi nel piano σ ribaltiamo questo su α facendolo rotare di 90° verso destra intorno alla sua traccia VA' sul piano medesimo, otteniamo così: a_1, μ_1, c_1, ω_1, b_1, r_1, I_1 e γ_1 come ribaltamenti rispettivi dell'asse a, del meridiano μ, della corda c, del cerchio ω, del diametro b di φ, della retta r, del punto I e del cerchio γ.

Per l'altra accennata costruzione esterna al piano σ proiettiamo ortogonalmente sul piano α il punto I in I', il parallelo π in π' e la retta i in i' normale a VA'; i punti comuni a π' e i' definiscono le proiezioni M' e N' dei punti M e N appartenenti al parallelo π, le altezze h dei quali rispetto al piano α sono eguali a CA', ove con C si è indicato il centro del parallelo medesimo e A' il punto di incontro dell'asse a col piano α. Le proiezioni I' e π' e l'altezza h si ricavano anche dal ribaltamento del piano σ, essendo $CA' = C_1A'$.

Conosciute così le proiezioni sul piano orizzontale di riferimento α dei due punti M e N di λ e le altezze di questi rispetto al piano medesimo,

applicando il metodo delle altezze rappresentiamo le prospettive M^* e N^* dei detti punti nel seguente modo.

Le tracce delle rette normali al quadro condotte pei punti M' e N' sono rispettivamente T'_m e T'_n sulla retta o mentre i punti di fuga delle stesse coincidono col punto principale. Le prospettive dei punti M e N si determinano mediante due rette condotte per ciascuno di essi, delle quali l'una normale al quadro e l'altra normale a α, nei punti di incontro delle prospettive di ciascuna di queste coppie di rette si ottengono le prospettive M^*, N^* richieste.

Dette costruzioni si vedono eseguite in parte nella fig. 1 ed in parte nella fig. 2 nelle quali il foglio di disegno rappresenta rispettivamente il piano orizzontale α ed il quadro, piano verticale. Immaginando la linea di orizzonte o della fig. 1 traslata nella retta o della fig. 2 su questa si sono segnati, deducendoli anche dalla fig. 1, i punti P, N'^*, T'_n, M'^*, T'_m, che rappresentano rispettivamente il punto principale, la prospettiva di N', la traccia della normale per N' al quadro, la prospettiva di M' e la traccia della normale per M' al quadro. Sulle perpendicolari condotte per T'_m e T'_n alla retta o si sono staccati a partire da T'_m e T'_n i segmenti $T'_m\ T_m$ e $T'_n\ T_n$ eguali a h, T_m e T_n indicano le tracce delle normali m, n al quadro condotte pei punti M, N; congiungendo le stesse col punto P si ottengono m^*, n^*, prospettive di m, n. Le rette h^*_M e h^*_N perpendicolari a o condotte per M'^* e N'^* sono le prospettive delle normali condotte pei punti M e N a α, gli incontri di queste con m^* e n^* determinano i punti M^* e N^* richiesti.

Le prospettive dei punti M e N potremmo anche ottenerle conducendo rispettivamente per ciascuno di essi due qualsiasi rette orizzontali, delle quali facilmente si determineranno le tracce ed i punti di fuga. Nei punti di incontro delle prospettive di ciascuna di dette coppie di rette si otterranno le prospettive M^* e N^* medesime.

Se si considera la superficie Σ come inviluppo di coni ad essa circoscritti lungo i paralleli per rappresentarne la prospettiva occorre determinare i punti nei quali la toccano i piani tangenti ai detti coni e passanti pel centro di vista V. Tali punti si otterranno costruendo le sezioni dei diversi coni col piano α perpendicolare all'asse a di Σ condotti per V ed i loro raggi passanti pei punti ove esse sono toccate dalle tangenti condotte da V e quindi determinando i punti ove gli stessi raggi, prolungati se occorre, incontrano i cerchi eguali ai corrispondenti paralleli descritti nel piano α col centro nel punto ove lo stesso piano è incontrato dall'asse a. Dei detti punti appartenenti alla curva λ richiesta si conosceranno quindi sia le proiezioni sul piano α che le altezze rispetto al piano medesimo e si procederà in modo analogo a quello precedentemente descritto per la determinazione delle prospettive di essi [1]).

[1]) Nella fig. 1 sono state eseguite anche le costruzioni per la determinazione

Prospettiva cilindrica.

La prospettiva cilindrica di una superficie Σ di rotazione si ottiene determinando la curva λ di contatto del cilindro Γ ad essa circoscritto, del quale sia assegnata la direzione delle generatrici, il cui punto all'infinito si immagina essere un centro di vista V. La prospettiva di λ, contorno apparente della superficie rispetto al punto improprio V, ovvero la proiezione di λ sul quadro secondo la direzione assegnata rappresenta la prospettiva cilindrica della superficie di rotazione considerata. Tale prospettiva è ortogonale od obliqua secondo che le generatrici del cilindro Γ sono ortogonali od oblique rispetto al quadro della rappresentazione prospettica.

Esponiamo dapprima il caso della prospettiva cilindrica ortogonale per la quale consideriamo il quadro χ inclinato rispetto ad un piano orizzontale α, piano fondamentale di riferimento, e come centro di vista V il punto all'infinito della direzione normale al quadro medesimo.

Sia assegnata la superficie Σ di rotazione mediante il suo asse a normale al piano α ed un suo meridiano, sia β l'angolo di inclinazione di χ su α e propriamente l'angolo diedro superiore posteriore formato dai piani stessi, immaginando l'osservatore collocato nella regione dello spazio anteriore rispetto al quadro e la superficie da rappresentarsi nella regione posteriore, e sia A' (fig. 3) il piede dell'asse a di Σ su α. I piani χ e α si intersecano lungo la retta t, che assumiamo come linea di terra.

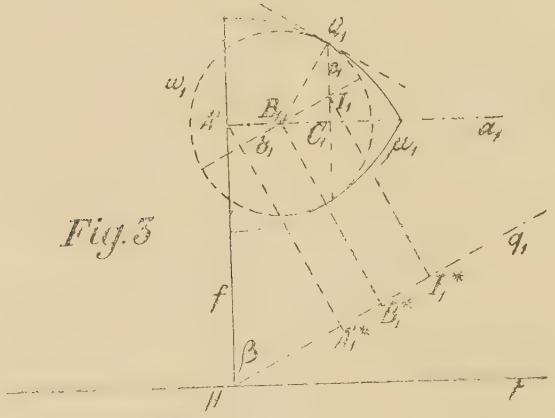
Consideriamo la superficie Σ come inviluppo di sfere Ω tangenti lungo i paralleli π, la curva λ si ottiene determinando i cerchi massimi φ delle sfere stesse lungo i quali queste sono toccate dai cilindri Γ normali al quadro e ad esse circoscritti. I cerchi π e φ hanno, in generale, una corda s in comune nei cui punti estremi i piani tangenti alle sfere, essendo anche tangenti a Σ e normali al quadro, passano per il punto improprio V e conseguentemente detti punti appartengono alla curva λ richiesta. Le prospettive di essi si determinano facilmente rappresentando le prospettive delle corde s parallele al quadro, gli estremi delle quali si trovano sui cerchi φ^*, prospettive dei cerchi φ, contorni apparenti delle sfere Ω ed appartenenti a piani paralleli al quadro.

Per ottenere le prospettive di due punti M, N della curva λ appartenenti al parallelo di centro C su a determiniamo la sfera Ω tangente a Σ lungo π, e sia φ il cerchio lungo il quale Ω è toccata dal cilindro Γ normale al quadro e ad essa circoscritto. Il piano σ di profilo passante per l'asse a contiene, oltre questo: le rette q e f lungo le quali esso interseca il quadro χ ed il piano fondamentale α, un meridiano μ di Σ, un diametro di

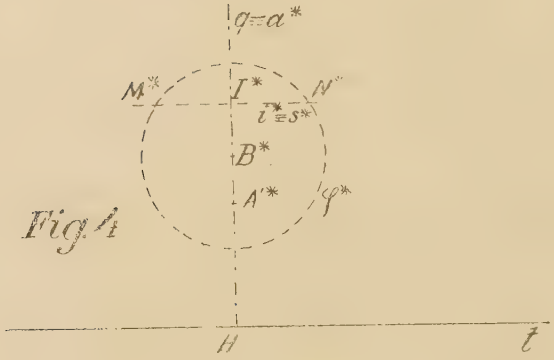
degli stessi punti M, N nel caso in cui si consideri la superficie Σ come inviluppo di coni.

π posto in una corda c di μ perpendicolare all'asse a, un cerchio massimo ω di Ω avente il centro nel punto B in cui la normale a μ in uno dei punti $Q \equiv c\mu$ incontra l'asse a e per raggio BQ, ed infine un diametro b del cerchio φ, che è anche diametro di ω e parallelo a q.

I punti M e N sono in simmetria ortogonale rispetto al piano σ e le costruzioni occorrenti per determinarli, come risulta da quanto si è esposto, si devono eseguire tutte nel piano σ eccetto una, cioè quella relativa allo



staccare sulla retta i perpendicolare a σ condotta per il punto $I \equiv bc$ e da ciascun lato di essa i segmenti IM e IN eguali alla metà della corda s comune a π e φ.



Anche in questo caso come in quello precedentemente trattato per la prospettiva conica eseguiamo le costruzioni inerenti al piano σ ribaltando questo su α con una rotazione di 90^0 verso destra intorno alla sua traccia f sul piano α medesimo. Si determinano così: $a_1, q_1, \mu_1, c_1, \omega_1, b_1$ e I_1 come ribaltamenti rispettivi dell'asse a, della retta $q \equiv \sigma\chi$, del meridiano μ, della corda c, del cerchio ω, del diametro b di φ e del punto I.

Per quanto riguarda l'altra accennata costruzione esterna al piano σ osserviamo che i punti M, N appartengono sia alla retta i parallela a t che al cerchio φ, contorno apparente di Ω. È evidente quindi che le prospettive M^*, N^* di essi sono i punti comuni a i^* e φ^*, prospettive di i e φ. La retta i^* passa per I^*, prospettiva del punto I, ed il centro del cerchio φ^*, il cui raggio è eguale a quello di φ, è B^* prospettiva del punto B.

Nella fig. 3, in cui il foglio di disegno rappresenta il piano fondamentale α, si vedono eseguite le costruzioni grafiche relative al piano σ ribaltato per la determinazione dei punti I_1^* e B_1^*, ribaltamenti di I^* e B^* appartenenti alla retta q, ottenendo così le distanze di essi dalla linea di terra.

Immaginando traslati la retta t ed il punto $II \equiv tf$ della fig. 3 in t e H della fig. 4, in cui il foglio di disegno rappresenta il quadro χ, sulla normale q condotta a t in H si sono staccati i segmenti HI^* e HB^* rispettivamente eguali a HI_1^* e IIB_1^* della fig. 3 ottenendo così i punti I^* e B^*, che rappresentano rispettivamente le prospettive del punto I pel quale passa la retta i e del centro B del cerchio φ. I punti comuni al cerchio di centro B^* e raggio eguale a quello di φ ed alla retta i^* condotta per I^* parallelamente a t sono le prospettive M^*, N^* richieste dei punti M, N della curva λ appartenenti al parallelo π di Σ.

Per rappresentare infine la prospettiva cilindrica obliqua di una superficie Σ di rotazione consideriamo il quadro χ verticale e come centro di vista il punto all'infinito di una direzione obliqua rispetto al quadro stesso e normale rispetto alla linea di terra. La prospettiva della curva λ di contatto del cilindro Γ circoscritto a Σ ed avente le generatrici parallele alla direzione medesima rappresenta la prospettiva richiesta di Σ.

Assegnati quindi la superficie Σ mediante il suo asse a normale al piano fondamentale α ed un suo meridiano, e l'angolo β di inclinazione rispetto al quadro della direzione considerata, determiniamo il piano σ di profilo passante per a; questo interseca il piano fondamentale secondo la retta f, alla quale appartiene il piede A' dell'asse a su α, ed il quadro secondo la retta q (fig. 5). Considerando inoltre anche in questo caso come in quelli precedentemente esposti la superficie Σ di rotazione come inviluppo di sfere ad essa tangenti lungo i paralleli, per rappresentare le prospettive dei punti M, N di λ appartenenti al parallelo π di centro C su a ribaltiamo verso destra il piano σ su α. Si ottengono così: a_1, μ_1, $q_1 \equiv t$, ω_1, d_1, b_1, c_1, I_1, B_1^* come ribaltamenti rispettivi dell'asse a, di un meridiano μ di Σ, della retta q lungo la quale σ interseca il quadro χ, del cerchio massimo ω di Ω — sezione prodotta dal piano σ nella sfera Ω tangente a Σ lungo π —, della retta d parallela alla direzione assegnata e condotta per B — centro di ω —, del diametro b del cerchio φ lungo il quale la sfera Ω è toccata dal cilindro Γ ad essa circoscritto con le generatrici parallele a d, di un diametro c del parallelo π, del punto $I \equiv bc$ e della prospettiva B^* del punto B ovvero della proiezione di B secondo la direzione assegnata sul quadro. Condotta

quindi per I_1 la parallela r_1 a d_1, si determina $I_1^* \equiv r_1 t$ come ribaltamento del punto I^* pel quale passa la retta i^* parallela a t e contenente M^*, N^*, prospettive richieste dei punti M, N.

Per l'altra nota costruzione da eseguirsi esternamente a σ proiettiamo

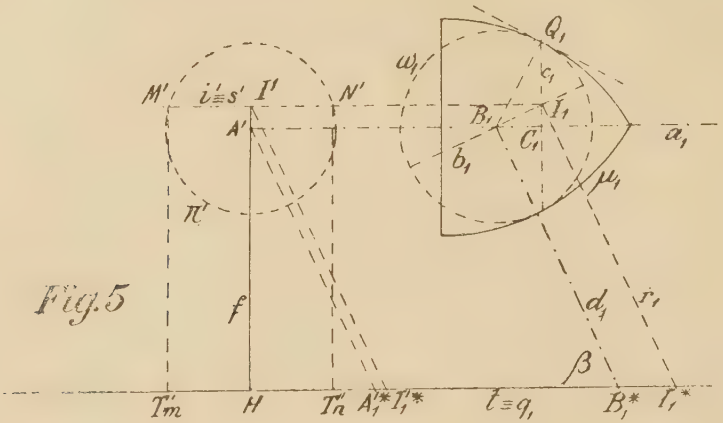


Fig. 5

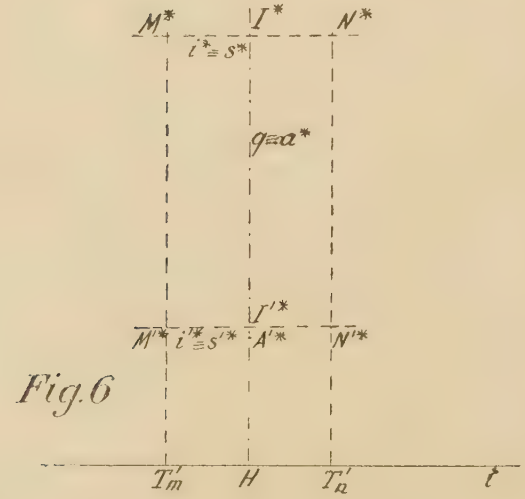


Fig. 6

ortogonalmente sul piano α il punto I in I', il parallelo π in π' e la retta i in i'; i punti comuni a π' e i' definiscono le proiezioni M', N' dei punti M, N le altezze h dei quali rispetto al piano α sono eguali a CA'. Le proiezioni del punto I e del parallelo π, e l'altezza h si ricavano anche dal ribaltamento del piano σ, essendo $CA' = C_1A'$.

Conosciute così le proiezioni ortogonali sul piano orizzontale di riferi-

mento α dei due punti M, N e le altezze di questi rispetto al piano medesimo determiniamo facilmente le prospettive M^*, N^* di essi.

Riferendoci alla fig. 5 ed alla fig. 6, nelle quali il foglio di disegno rappresenta rispettivamente il piano α orizzontale ed il quadro χ verticale, si sono traslati la linea di terra t ed il punto H della prima in t e H della seconda figura. Sulla normale q condotta per H a t (fig. 6) si è staccato un segmento $HI^* = HI_1^*$ della fig. 5 ottenendo così il punto I^* come prospettiva del punto I; condotta infine per I^* la retta i^* parallela a t su essa si sono staccati da una parte e dall'altra di I^* medesimo i segmenti I^*M^* e I^*N^* eguali fra loro ed a $I'M'$ e $I'N'$ della fig. 5, rappresentando così M^* e N^* le prospettive richieste della coppia di punti di λ in simmetria ortogonale rispetto a σ ed appartenenti al parallelo π di Σ.

Ripetendo analoghe costruzioni per altri paralleli si determineranno altri punti di λ^*, prospettiva della curva λ, risultando così rappresentata la prospettiva cilindrica obliqua della superficie Σ di rotazione considerata.

EMANUELE QUERCIGH

Commemorazione letta dal socio ordinario **Geremia D' Erasmo**

nell' adunanza del dì 4 maggio 1939 - XVII

« Si può, con sereno animo, anche morire, senza rimpianto per la propria vita fuggente, ma non si può considerare senza commozione, senza profondo rammarico la morte altrui, quando essa stronca una gagliarda volontà di realizzazione la quale non ha raggiunto ancora tutte le sue alte mete, quando annienta una mirabile energia tutta dedicata alla investigazione scientifica, tutta protesa verso la conquista nel sapere ».

Con queste parole, iniziando la commemorazione di Ferruccio Zambonini, Emanuele Quercigh esprimeva il suo profondo cordoglio per l'immatura scomparsa del grande e indimenticabile Maestro, caduto a mezzo della sua giornata, quando ancora tanto poteva dare di sè alla scienza chimica e mineralogica. Queste stesse parole possiamo noi oggi ripetere, alla distanza di pochi anni, per il commemorante di allora, ugualmente caduto, nella pienezza di una maturità che, nutrita di lunga e severa preparazione, avrebbe senza dubbio dato ancora cospicui frutti negli stessi campi della indagine scientifica. Perchè un medesimo destino falciò, a poco più di cinquanta anni, le due esistenze di Zambonini e di Quercigh, del maestro e del discepolo prediletto, che, seguendone le orme, ne aveva continuata l'opera feconda.

L' uno e l'altro avevano iniziato a Torino la loro carriera scientifica, dedicandosi dapprima a ricerche di chimica analitica e di chimica fisica; l' uno e l' altro avevano occupato, per concorso, la cattedra di Mineralogia nell' Università di Sassari ed erano passati, poi, a quella di Palermo; l'uno e l' altro chiusero la loro breve ma luminosa vita di studiosi e di maestri qui a Napoli, mentre coltivavano col massimo fervore le ricerche mineralogiche in quel vastissimo, inesauribile campo vesuviano, « mirabile fucina sempre attiva nel produrre minerali e deposito inesausto di quelli già formatisi nel succedersi dei tempi ».

Nato a Cividale il 9 gennaio 1885 da Enrico e da Vittoria Scubla e laureato in Chimica pura nell' Università di Padova nel 1910, Emanuele Quercigh aveva già passato alcuni dei suoi anni giovanili a Napoli, come assistente di Arnaldo Piutti, nell' Istituto di Chimica farmaceutica e tossicologica. Frutto di quel primo periodo di studi sono i suoi lavori sulla determinazione della viscosità degli oli essenziali come criterio di apprezzamento

EMANUELE QUERCIGH

nato in Cividale il 9 gennaio 1885 morto in Napoli il 21 aprile 1939

della loro purezza, sulla natura di alcune incompatibilità farmaceutiche indagata mediante l'analisi termica, e sulle relazioni di affinità esistenti tra l'antimonio, lo zolfo e l'ossigeno, come pure tra antimonio, arsenico e iodio.

Ma allorchè, sul finire del 1913, Ferruccio Zambonini, nominato professore di Mineralogia a Torino, cominciò a circondarsi di giovani collaboratori, dei quali fu sommo maestro ed affettuoso animatore, fra i primi a seguirlo nel grande Istituto, che egli andava riorganizzando per intraprendervi nuove ricerche, fu Emanuele Quercigh. Zambonini aveva già potuto apprezzarne il grande amore per l'indagine mineralogica e la profonda preparazione nel campo della chimica, della fisica e della chimica fisica, scienze che di quelle indagini costituiscono la necessaria premessa. Dapprima assistente volontario, quindi ordinario, Quercigh non deluse le aspettative del maestro: un ben nutrito gruppo di lavori, in svariate branche della mineralogia, costituisce la più sicura testimonianza del gran fervore di ricerca, che animava il giovane allievo. Il quale fu ben presto chiamato dalla Patria a compiere il suo dovere di soldato. Scoppiata la grande guerra e intervenuta l'Italia nel conflitto mondiale, Quercigh, col grado di tenente di artiglieria, è sul Carso, alla diretta dipendenza del Comando Supremo, ed ottiene missioni di fiducia ed incarichi pericolosi. Molte volte, effettuando ispezioni in depositi di bombe dei nemici, rischia la vita; due volte ferito, merita per l'esemplare ardimento ed il sereno sprezzo del pericolo, la medaglia di bronzo al valor militare.

Allorche a guerra finita ritorna al suo Istituto, felice del dovere interamente e nobilmente compiuto, il lavoro viene ripreso in pieno. Ma i suoi studi lo hanno ormai posto in evidenza fra i migliori aspiranti ad una cattedra universitaria di Mineralogia; e nel novembre 1920, in sèguito a regolare concorso, egli può occupare a Sassari il posto precedentemente tenuto dal suo maestro. E, analogamente a lui, passa dopo pochi anni alla cattedra di Palermo, donde, alla distanza di un sessennio, viene finalmente a Napoli, chiamato dalla nostra Facoltà di Scienze a dirigere il glorioso Museo mineralogico dopo la morte di Eugenio Scacchi.

Nei tre Istituti di mineralogia, di cui tenne la direzione, tanto a Sassari come a Palermo ed anche a Napoli, Quercigh trovò laboratorii sprovvisti di ogni moderno mezzo d'indagine, musei scarsamente forniti o bisognosi di radicale riordinamento, che gli rendevano impossibile l'esecuzione di ogni ben condotta ricerca. Ma senza smarrirsi innanzi a tali difficoltà, agguerrito dalla fermezza della volontà e dalla costanza dei propositi, Egli si occupò immediatamente con grande zelo del radicale ordinamento dell'Istituto affidato alle sue cure, completando la biblioteca, acquistando nuovi apparecchi, sistemando le collezioni. Non vi è fra noi chi ignori quanto tempo, quanta energia, quanti sforzi siano necessari per vincere tutti gli ostacoli, i quali impediscono, specialmente in alcuni campi di ricerche essenzialmente legati alla costosa tecnica strumentale moderna, l'esecuzione

di serie ed accurate indagini sperimentali. Anche l'Istituto mineralogico napoletano, che vantava una lunga e gloriosa tradizione dei suoi direttori e collaboratori, quali Matteo Tondi, Teodoro Monticelli, Nicola Covelli, Leopoldo Pilla, Arcangelo ed Eugenio Scacchi, Carlo Riva, Giuseppe De Lorenzo, Pasquale Franco, Ferruccio Zambonini, Francesco Ranfaldi, Otto De Fiore, non era in condizioni molto migliori. Il terremoto del 23 luglio 1930 aveva provocato la rovina del soffitto del grande salone del Museo e reso improrogabili ed urgenti i lavori di restauro degli ambienti, di riadattamento del laboratorio e di sistemazione delle collezioni. Quercigh vi si accinse con passione, pur sapendo come tale ingrata fatica, che non tutti sanno apprezzare al giusto valore, avrebbe sottratti diversi anni alla più promettente ricerca scientifica, per sè ed i suoi collaboratori ed allievi. E raggiunse finalmente la meta, e potè ascrivere a giusto titolo di orgoglio le accresciute possibilità di lavoro di quell'Istituto, nel quale per lo innanzi solo pochissimi giovani avevano potuto, per necessità di eventi, dedicarsi alla ricerca scientifica.

Pur avendo necessariamente avuto, per le circostanze d'ambiente e di carriera testè ricordate, varie soste ed intervalli, la produzione scientifica di Quercigh ha dato, come risulta dall'annesso elenco bibliografico, contributi notevoli in diversi campi delle discipline da lui coltivate.

Fra le prime ricerche, in ordine di tempo, sono da annoverare quelle, compiute in collaborazione col dott. G. Pellini, sopra i tellururi di sodio, d'argento e d'oro, nelle quali s'indaga, col metodo dell'analisi termica, la tendenza alla formazione dei politellururi, mettendo in evidenza l'esistenza di due nuovi tellururi di sodio e di un nuovo tellururo d'argento. Gli stessi metodi dell'analisi termica applicò poi con successo, oltre che per risolvere intricati problemi relativi alle leghe metalliche binarie e ternarie, anche per delucidare — come ho già accennato — le relazioni chimiche tra arsenico, iodio ed antimonio, ed anche quelle tra lo zolfo, l'antimonio e l'ossigeno.

Di particolare interesse è il materiale sperimentale da lui raccolto sulla diffusione tra cristalli allo stato solido, materiale ampiamente discusso in una memoria stampata nei nostri Atti. Tali ricerche, offrendo un esempio di diffusione in cristalli chiari e trasparenti, dimostrano la capacità di diffondersi, in modo evidentissimo a temperatura e pressione ordinaria, anche fra composti che esistono come minerali in natura, e provano inoltre che come risultato di tale processo, ha luogo la formazione di una sostanza corrispondente ad altro minerale che si trova talvolta associato ai primi.

Mediante una serie di accurate esperienze Egli potè dimostrare, che l'alterazione prodotta dai cristalli di hauerite sull'argento e sul rame metallico, alterazione che si manifesta con la formazione dei solfuri corrispondenti, è una reazione allo stato solido, come aveva dapprima supposto lo Struever, e non una scomposizione del minerale causata dall'aria atmosferica, come aveva più tardi concluso il Beutell.

In altre pubblicazioni sono studiate le relazioni cristallografiche e di isomorfismo esistenti tra la naftalina, l'α-naftolo ed il β-naftolo e fra altri composti organici.

Si giunge così al cospicuo gruppo di lavori riflettenti le ricerche cristallografiche, fra le quali possiamo qui ricordare quelle riguardanti il dioptasio di Còrdoba, la prehnite nella diabase di Castelnuovo di Garfagnana, il nitrato d'uranile esaidrato, lo zolfo delle solfare siciliane e di altre località italiane, vari solfocianoplatinati di basi organiche, il gesso di Bellisio nel Pesarese, alcuni alogenomercurati di litio ed esametilentetrammina, la bismutinite, la celestite dei giacimenti siciliani, l'antimonite di varie provenienze, ecc.

Fra i molteplici lavori, che Quercigh ha pubblicato, anche nei Rendiconti della nostra Accademia, per chiarire la natura di alcuni minerali, sono anzitutto da ricordare quelli, che hanno permesso una esatta conoscenza della lublinite e della stibiobismutinite, nonchè la dimostrazione rigorosa del fatto che la miersite e la cuproiodioargirite non sono composti definiti, ma soluzioni solide. Con una serie di esaurienti ricerche potè definitivamente provare l'identità della sinchisite e della parisite, già sospettata da qualche autore ma non accettata da altri. In altre note studiò il fenomeno della termoluminescenza, che si riscontra in alcuni calcari del territorio di Dorgali, in provincia di Sassari, già per riscaldamento a 120° circa; descrisse il solfoselenio di Vulcano; e portò notevoli rettifiche a molti concetti errati che si erano diffusi sulle proprietà di vari minerali.

Di parecchie altre specie, finora comunemente ammesse al Vesuvio, Egli andava sottoponendo a nuovo rigoroso esame i caratteri, e delle scrupolose osservazioni cristallografiche e chimiche compiute sul materiale conservato nel Museo mineralogico di Napoli cominciava a pubblicare i risultati. Fanno parte di quest'ultimo gruppo di ricerche i lavori sulla termonatrite e sulla nahcolite vesuviana; ma molti altri Egli avrebbe tra breve fatti seguire a questi, ora che — come si compiaceva farmi rilevare nel corso delle mie visite al suo Istituto — il museo era finalmente riordinato e il laboratorio in grado di consentire moderne ricerche chimiche e morfologiche.

A rivedere molte specie mineralogiche del nostro classico vulcano Egli era stato portato, oltre che dalle nuove possibilità offerte dal suo Istituto, nel quale si conservano la maggior parte dei campioni che erano serviti alle famose ricerche di Arcangelo Scacchi e di Ferruccio Zambonini, anche dall'amore col quale aveva, in questi ultimi anni, per incarico della nostra Accademia, atteso alla preparazione della seconda edizione della *Mineralogia vesuviana* di Zambonini, fondendo i vari scritti di lui sui minerali del Vesuvio, aggiungendo un cenno dei contributi apportati in seguito da altri studiosi, aggiornando la bibliografia e adottando una più moderna classificazione.

Una pregevole collaborazione Egli diede anche alla *Nuova Enciclopedia*

di Chimica, edita nei primi anni del secolo XX dall'Unione Tip. Editrice Torinese sotto la direzione del prof. Guareschi, sviluppando i capitoli relativi agli oli essenziali, al rame, al selenio, al sodio ed ai rispettivi composti, e trattando pure dei fenomeni di diffusione tra cristalli allo stato solido. Fra gli articoli di volgarizzazione della scienza merita infine di essere segnalato, per la sua chiarezza e precisione, quello relativo al concetto di minerale, pubblicato nel 1933.

Anche se a taluno può forse apparire non molto considerevole come mole in senso assoluto, la produzione scientifica di Emanuele Quercigh si contraddistingue per la varietà degli argomenti trattati, per la profonda conoscenza della letteratura e per la sicura padronanza dei più perfezionati metodi sperimentali.

Coscienzioso e severo ricercatore in laboratorio, Egli era altresì efficace ed appassionato insegnante. Le sue lezioni, modello di sobrietà e di chiarezza, avvincevano senza sforzo. Oltre al corso di mineralogia, a Sassari tenne anche, per incarico, l'insegnamento della Chimica, meritando il plauso incondizionato di quella Facoltà di Medicina, e a Napoli, per un decennio, quello della Petrografia, frequentato da tutti i giovani naturalisti.

Questi meriti scientifici e didattici furono del resto ben presto riconosciuti e gli procacciarono estimazione ed onori. Per molti anni attivo componente del Consiglio di Amministrazione dell'Università di Napoli, portò in quel consesso il suo giudizio equilibrato e sereno. Nostro socio corrispondente dal 14 maggio 1932 e ordinario dal dì 11 giugno 1938, era altresì socio ordinario della Società di Scienze naturali ed economiche di Palermo, e corrispondente della R. Accademia di Udine, dell'Accademia Gioenia di Catania, della R. Accademia di Scienze, Lettere e Belle Arti di Palermo, della Società di Naturalisti di Napoli. Il Consiglio Nazionale delle Ricerche lo annoverava tra i componenti del Comitato per la Geologia. Faceva parte del Comitato Tecnico del R. Osservatorio Vesuviano, e nell'adunanza del 13 aprile di quest'anno, cioè appena otto giorni prima della sua immatura fine, era stato eletto ad unanimità socio ordinario del nostro R. Istituto d'Incoraggiamento Era Commendatore dell'ordine della Corona d'Italia e aveva aderito al movimento di rinascita spirituale della Nazione inscrivendosi al P. N. F. fin dal 1925.

In questi ultimi anni, confortato dall'intima felicità del nido che si era formato, vide realizzato il sogno di una famigliuola sua. Marito tenerissimo e padre esemplare, trovò in essa le gioie più serene, e lascia ora nella inconsapevolezza della grave perdita subìta i due teneri figliuoletti, che formarono lo scopo principale dell'ultimo periodo di sua vita.

Apparentemente chiuso in sè stesso, onesto fino allo scrupolo, senza grandi mezzi di fortuna, non si lasciò fiaccare dalle prime avversità della vita, ma, come il suo maestro Zambonini, lottò fortemente per superarle e visse modestamente, con semplicità di gusti e con fiducia nell'avvenire.

Ebbe della vita un senso altamente umanitario e conservò il culto dei più puri ideali in un'anima, che alla delicata sensibilità di un poeta univa tesori di bontà e di fede cristiana.

Alcune massime, da lui raccolte in un vecchio taccuino e seguìte poi quale norma costante di vita, possono — assai meglio delle mie parole — tratteggiare con la loro laconica brevità il carattere dell'uomo, che volle e seppe ispirarsi fortemente ad esse: « Uso moderatissimo della parola; sollecitudine in tutto; osare andare avanti; sopportare con pazienza le noie; non fare conoscenze inutili; pagare subito i debiti o, meglio, non farne mai; chi non può quel che vuol, quel che può voglia ». Quest'ultimo concetto — che Quercigh, al pari di tanti altri, attribuiva a Leonardo, perchè Leonardo lo aveva trascritto, come usava fare delle cose che gli piacevano o si coordinavano a idee o immaginazioni sue, e che è invece, secondo Isidoro Del Lungo, il primo verso di un sonetto di Antonio Di Meglio, araldo della Signoria — Egli soleva ripeterlo, a sè stesso ed ai suoi, a guisa di ammonimento, come un ammonimento finisce il sonetto stesso:

Vogli sempre poter quel che tu debbi.

Tale, o Colleghi, fu lo scienziato, il maestro, l'uomo in cui oggi rimpiangiamo l'irreparabile perdita. Alla buona e venerata memoria dell'amico, che per trent'anni io ebbi carissimo, e del quale anche tutti voi sapeste apprezzare le nobili doti di mente e di cuore, vada oggi il mesto saluto di questa Accademia, alla quale Egli dette i frutti migliori del suo ingegno, che restano a perpetuarne l'indelebile ricordo.

Pubblicazioni di **Emanuele Quercigh**

1. *I tellururi di sodio* (in collabor. con G. Pellini). Rend. R. Acc. Lincei, Cl. Sc. fis., s. 5.ª, vol. XIX, 2.° sem. Roma, 1910.
2. *I tellururi d'argento* (in collabor. con G. Pellini). Rend. R. Acc. Lincei, Cl. Sc. fis., s. 5.ª, vol. XIX, 2.° sem. Roma, 1910.
3. *I tellururi d'oro* (in collabor. con G. Pellini). Rend. R. Acc. Lincei, Cl. Sc. fis., s. 5.ª, vol. XIX, 2.° sem. Roma, 1910.
4. *Ueber die ternären Legierungen von Magnesium, Zinc und Cadmium* (in collab. con G. Bruni e C. Sandonnini). Zeitschr. f. anorg. Chemie, vol. LXVIII, Leipzig, 1910.
5. *Ueber das Zustandsdiagramm der Silber-Cadmiumlegierungen* (in

collab. con G. Bruni). Zeitschr. f. anorg. Chemie, vol. LXVIII. Leipzig, 1910.

6. *Ueber das Zustandsdiagramm der Silber-Natriumlegierungen.* Zeitschr. f. anorg. Chemie, vol. LXVIII. Leipzig, 1910.
7. *Sui pretesi pentaioduri di arsenico e di antimonio.* Atti R. Istituto Veneto di Sc., Lett. ed Arti, vol. LXX. Venezia, 1911.
8. *Il sistema ternario Sb + As + I.* Rend. R. Acc. Lincei, Cl. Sc. fis., s. 5.ª, vol. XXI, 1.° sem. Roma, 1912.
9. *Sugli ossisolfuri di antimonio.* Rend. R. Acc. Lincei, Cl. Sc. fis., s. 5.ª, vol. XXI, 1.° sem. Roma, 1912.
10. *Sulla natura di alcune incompatibilità farmaceutiche* (in collab. con G. Wautrain Cavagnari). Boll. chim. farmaceutico, fasc. 20. Milano, 1912.
11. *Sulla identità della Sinchisite con la Parisite.* Rend. R. Acc. Lincei, Cl. Sc. fis., s. 5.ª, vol. XXI, 1.° sem. Roma, 1912.
12. *Sull' impiego della viscosimmetria nell' analisi degli oli essenziali* (in collab. con D. Moreschini). Rend. Soc. chim. it., vol. XIII. Roma, 1913.
13. *O i essenziali.* Nuova enciclop. di Chimica scient., tecnol. e industr., vol. IX. Torino, U. T. E. T., 1913.
14. *Sulla vera natura della Miersite e della Cuprojodargirite,* note I, II e III. Rend. R. Acc. Lincei, Cl. Sc. fis., s. 5.ª, vol. XXIII, 1.° sem. Roma, 1914 (ristamp. in Riv. di Miner. e Cristallogr. ital., vol. XLIII. Padova, 1914).
15. *Il Dioptasio di Còrdoba (Argentina).* Rend. R. Acc. Sc. fis. e mat. Napoli, 1914.
16. *Sulla diffusione tra cristalli allo stato solido a temperatura ordinaria e sua importanza nella minerogenesi.* Atti R. Acc. Sc. fis. e mat., s. 2.ª, vol. XVI, n. 7. Napoli, 1915.
17. *Diffusione tra cristalli allo stato solido.* Suppl. Ann. Enciclop. Chimica. Torino, U. T. E. T., 1915.
18. *Lo zolfo dell' antimonite alterata di Selva presso Casal di Pari (Grosseto).* Rend. R. Acc. Lincei, Cl. Sc. fis., s. 5.ª, vol. XXIV, 1.° sem. Roma, 1915.
19. *Sulla Prehnite nella diabase di Castelnuovo di Garfagnana.* Riv. di Miner. e Cristallogr. ital., vol. XLIV. Padova, 1915.
20. *A proposito dell' azione della Hauerite sull' argento e sul rame.* Rend. R. Acc. Lincei, Cl. Sc. fis., s. 5.ª, vol. XXIV, 1.° sem. Roma, 1915.
21. *Cenni su alcuni minerali dei tufi di Isernia (Campobasso).* Rend. R. Acc. Lincei, Cl. Sc. fis., s. 5.ª, vol. XXIV, 1.° sem. Roma, 1915.
22. *Su di una modificazione alla reazione differenziale di Meigen fra calcite ed aragonite.* Rend. R. Acc. Lincei, Cl. Sc. fis., s. 5.ª, vol. XXIV, 1.° sem. Roma, 1915.
23. *Studio cristallografico di alcuni solfocianoplatinati di basi organiche.* Riv. di Miner. e Cristallogr. ital., vol. XLIV. Padova, 1915.

24. *Cristallografia del nitrato d'uranile esaidrato.* Riv. di Miner. e Cristallogr. ital., vol. XLIV. Padova, 1915.
25. *Sulla vera natura della Lublinite con particolare riguardo a quella di Nocera (Salerno).* Riv. di Miner. e Cristall. it., vol. XLIV. Padova, 1916.
26. *Su alcuni alogenomercurati di litio ed esametilentetrammina.* Riv. di Miner. e Cristallogr. ital., vol. XLVII. Padova, 1916.
27. *Su un notevole cristallo di gesso di Bellisio (Pesaro).* Atti R. Acc. Sc., vol. LI. Torino, 1916.
28. *Sulle relazioni cristallografiche e d'isomorfismo fra naftalina, α-naftolo e β-naftolo.* Torino, Tip. Barattini, 1919.
29. *Rame.* Nuova enciclop. di Chimica scient., tecnol. e industr., vol. XI. Torino, U. T. E. T, 1921.
30. *Selenio.* Nuova enciclop. di Chimica scient., tecnol. e industr., vol. XI. Torino, U. T. E. T., 1921.
31. *Sodio e suoi composti.* Nuova enciclop. di Chimica scient., tecnol. e industr., vol. XI. Torino, U. T. E. T., 1921.
32. *Sulla lublinite di Sassari.* Rend. R. Acc. Lincei, Cl. Sc. fis., 5.ª s., vol. XXX, 2.° sem. Roma, 1921 (ristamp. in: Studi Sassaresi, s. 2.ª, vol. II. Sassari, 1923).
33. *Sulla orientazione cristallografica della naftalina e dell'α-naftolo e β-naftolo.* Studi Sassaresi, serie 2.ª, vol. I. Sassari, 1922.
34. *Sullo zolfo che accompagna alcune galene sarde.* Note I e II. Rend. R. Acc. Lincei, Cl. Sc. fis., s. 5.ª, vol. XXXII, 2.° sem. Roma, 1923.
35. *Sull'antimonite di Karassi (Anatolia).* Rend. R. Acc. Lincei, Cl. Sc. fis., 5.ª s., vol. XXXII, 2.° sem. Roma, 1923.
36. *Su di un notevole calcare di Dorgali (Sardegna).* (In collabor. con F. Cherchi). Studi sassaresi, s. 2.ª, vol. II. Sassari, 1923.
37. *Sulla celestite di Pietraperzia e di Trabonella (Caltanissetta).* Rend. R. Acc. Lincei, Cl. Sc. fis., s. 5.ª, vol. XXXIII, 2.° sem. Roma, 1924.
38. *Sulla bismutinite.* Rend. R. Acc. Lincei, Cl. Sc. fis., s. 5.ª, vol. XXXIII, 2.° sem. Roma, 1925.
39. *Sul solfoselenio di Vulcano (Isole Eolie).* Rend. R. Acc. Sc. fis. e mat., s. 3.ª, vol. XXXI. Napoli, 1925.
40. *Su alcune celestiti siciliane.* Boll. Associaz. Miner. Siciliana, n. 5-7. Palermo, 1926.
41. *Sulla natura della stibiobismutinite.* Rend. R. Acc. Lincei, Cl. Sc. fis. s. 6.ª, vol. V, 2.° sem. Roma, 1926.
42. *Ricerche cristallografiche circa il preteso pentajoduro d'arsenico.* Boll. Soc. di Scienze nat. ed econ., vol. VIII. Palermo, 1926.
43. *Sulla morfologia dell'antimonite.* Giorn. Soc. di Sc. nat. ed econ., vol. XXXV. Palermo, 1927.
44. *Sulla baritocelestina di Jaën.* Boll. Soc. Sc. nat. ed econ., n. s., vol. XI. Palermo, 1929.

45. *Contributo alla conoscenza del solfo di Sicilia.* Boll. Assoc. Mineraria Siciliana, vol. V, n. 1. Palermo, 1929.
46. *Sulla reazione di F. Feigl per l'acido fosforico.* Boll. Soc. Sc. nat. ed econ., n. s., vol. XI. Palermo, 1929.
47. *Sul preteso pentaioduro d'antimonio.* Giorn. Soc. di Sc. nat. ed econ., vol. XXXV (1927-29). Palermo, 1930.
48. *Eugenio Scacchi. Commemorazione.* Atti Acc. Pontaniana, vol. LXI. Napoli, 1931.
49. *Commemorazione del socio corrispondente Eugenio Scacchi.* Giorn. Soc. Sc. nat. ed econ., vol. XXXVI (1930-32). Palermo, 1933.
50. *Il concetto di minerale.* Riv. di Fis., mat. e Sc. nat., anno VII, fasc. 6. Napoli, 1933.
51. *Commemorazione di Ferruccio Zambonini.* Nel volume: Ferruccio Zambonini. In memoriam. Napoli, S. I. E. M., 1934.
52. *Mineralogia Vesuviana* di Ferruccio Zambonini, II edizione. Atti R. Acc. Sc. fis. e mat., suppl. al vol. XX della serie 2.ª. Napoli, 1935.
53. *Sulla presenza della nahcolite al Vesuvio.* Rend. R. Acc. Sc. fis. e mat., s. 4.ª, vol. VII. Napoli, 1937.
54. *Sulla termonatrite vesuviana* (in collab. con L. Pavone). Rend. R. Acc. Sc. fis. e mat., s. 4.ª, vol. VII. Napoli, 1937.

Il movimento del Polo durante il 1938 dalle osservazioni delle Stazioni Internazionali.

Nota di **L. Carnera** *e* **P. Vocca**

(Adunanza del dì 4 maggio 1939 - XVII).

Sunto. — Dalle osservazioni di latitudine eseguite nel 1938 dalle Stazioni Internazionali e calcolate all' Ufficio Centrale vennero tratte le coordinate istantanee del Polo, e la conseguente traiettoria, conservando ancora due distinte deduzioni basate una sui soli risultati delle stazioni boreali, l' altra su quelli delle boreali ed australi.

I risultati delle osservazioni di latitudine fatte nelle otto stazioni internazionali, che qui pubblichiamo, costituiscono il seguito di quanto è stato fatto negli anni decorsi, avendo ritenuto opportuno non introdurre variazioni essenziali per conservare una omogeneità nei risultati atta a permettere paragoni. Solo ove è stato necessario portare variazioni si è fatto cenno preciso: ove pertanto non sia detto esplicitamente il contrario si deve ritenere, che nulla è stato variato in confronto al passato.

Non si è avuta variazione alcuna nelle stazioni per quanto riguarda il personale ed i programmi di osservazione, e nulla vi sarebbe da dire neppur per gli strumenti, che rimasero gli stessi, salvo a Carloforte. In questa stazione è stato necessario rimuovere il vecchio telescopio zenitale per sottoporlo ad una radicale opera di riparazione. Nel giugno si sostituì il vecchio strumento con uno analogo della stessa fabbrica, ma di dimensioni più piccole messo cortesemente a disposizione dall' Osservatorio della R. Università di Palermo, e con esso vennero eseguite le osservazioni fino alla fine del 1938. Nel frattempo le officine Galileo di Firenze eseguirono i lavori di riparazione intese particolarmente a ripulire radicalmente l' obbiettvo, a sostituire le vecchie livelle ed il micrometro con nuovi equivalenti, ad apportare miglioramenti radicali all' illuminazione ecc. Mentre pertanto si è continuato a far uso nelle riduzioni delle osservazioni dei valori usati in passato, per il telescopio nuovo di Carloforte si sono adottati provvisoriamente i seguenti valori:

Valore angolare di una rotazione del micrometro: 51″.6533
Valore angolare di una parte della Livella I : 1″.160 = 0^R.02243
Livella II: 1″.047 = 0^R.02025

che vennero dedotti, per il micrometro da misure dirette di coppie di stelle e dalle stesse osservazioni di latitudine, e per le livelle da osservazioni appropriate fatte ad una mira.

Il lavoro d'osservazione è stato fatto ovunque con la consueta diligenza, e quasi tutte le stazioni non si sono limitate alle sole determinazioni della latitudine, ma hanno pur voluto aggiungere particolari osservazioni per lo studio delle diverse costanti strumentali: vanno ricordate a questo riguardo particolarmente per l'abbondanza, precisione e regolarità di lavoro le stazioni di Batavia, Kitab, La Plata, Mizusawa ed Ukiah. Anche durante il decorso anno però si dovette lamentare da parte di qualche stazione la insufficiente cura posta nel rettificare lo strumento, dando così adito ad influenze soverchie dell'elemento « livelle », con la conseguenza di vedere aumentati sensibilmente gli errori di osservazione. Come è stato scritto in passato, dobbiamo ancor insistere per richiamare l'attenzione degli osservatori su questo punto, e pregare quanti ancora non si attengono alle istruzioni date in proposito dall'Albrecht, di voler considerare attentamente quelle istruzioni, e seguire tutte le preziose indicazioni contenute nell'« Anleitung zum Gebrauche des Zenittheleskops ».

Il numero complessivo delle coppie osservate durante il 1938 dalle diverse stazioni è stato il seguente:

	Gruppi serali:	Gr. matt.	Ass.
Mizusawa	590	576	1166
Kitab	704	594	1298
Carloforte	926	773	1699
Gaithersburg	708	605	1313
Ukiah	680	656	1336
	3608	3204	6812
Adelaide	681	599	1280
La Plata	873	709	1582
	1554	1308	2862
Batavia	940	997	1937
	6102	5509	11611

Nei due quadri seguenti sono contenuti per ciascuna stazione oltre al numero delle coppie osservate, i valori medii delle latitudini, calcolati assumendo al solito come declinazioni delle stelle i valori adottati precedentemente dal prof. Kimura, senza tener conto delle correzioni probabili determinate nelle discussioni degli anni precedenti.

Stazioni boreali. Osservazioni: **Sera**

1938	Gr	Mizusawa		Kitab		Carloforte		Gaithersb.		Ukiah	
.06	IV	3″.775	27	1″.825	38	8″.817	99	13″.334	34	12″.240	28
.14	V	.444	58	.615	22	.733	76	.247	45	.134	36
.23	VI	.508	57	.764	47	.876	91	.354	67	.386	25
.31	VII	.410	46	.599	68	.779	78	.350	71	.298	52
.39	VIII	.266	62	.593	82	.756	99	.253	38	.217	76
.47	IX	.165	9	.400	65	8.670	95	.159	64	.044	72
.55	X	.180	49	.603	81	9.026	124	.225	52	.134	84
.64	XI	.328	38	.794	93	9.235	81	.431	111	.172	84
.72	XII	.438	69	.861	100	9.156	68	.478	46	.170	75
.80	I	.550	73	.823	59	9.120	43	.433	80	12.152	54
.88	II	.438	59	.733	29	8.863	52	.107	55	11.959	48
.97	III	3.762	43	1.687	20	9.017	20	13.395	45	12.203	46

Osservazioni: **Mattino**

.07	V	3″.568	25	1″.612	34	8″.687	78	13″.193	20	12″.155	26
.14	VI	.635	54	.807	18	.901	63	.394	32	.359	35
.23	VII	.497	65	.718	46	.740	83	.360	65	.363	24
.31	VIII	.392	44	.586	65	.847	61	.314	70	.245	48
.39	IX	.182	49	.370	49	.678	90	.174	43	.126	77
.47	X	.222	15	.508	64	8.753	80	.289	64	.149	72
.56	XI	.355	39	.685	77	9.157	114	.447	37	.228	84
.64	XII	.362	51	.726	81	.265	71	.519	98	.238	78
.73	I	.420	61	.735	71	9.271	49	.392	38	12.154	77
.80	II	.402	89	.708	48	8.879	40	.156	81	11.958	53
.88	III	.631	49	.925	23	9.046	38	.460	26	12.182	47
.98	IV	3.698	35	1.858	18	8.736	6	13.223	31	12.158	35

Stazioni australi. Osservazioni: **Sera**

1938	Gr.	Adelaide		La Plata		Batavia	
.06	IV	36″.547	40	31″.781	74	38″.167	61
.14	V	.692	59	.887	75	.434	29
.23	VI	36.776	76	31.848	54	.535	68
.30	VII	37.091	43	32.127	48	.830	87
.39	VIII	37.026	67	31.825	91	.951	59
.47	IX	36.984	36	.795	65	.747	73
.55	X	.767	28	.629	86	.236	119
.64	XI	.724	32	.539	78	.387	108
.72	XII	.875	90	.838	94	.690	111
.81	I	.657	70	.671	80	.166	91
.88	II	.344	67	.592	64	.070	63
.97	III	36.677	73	31.985	64	38.367	71

Osservazioni: **Mattino**

.06	V	36″.612	38	31″.935	50	38″.421	59
.14	VI	36.633	63	31.871	61	.491	42
.23	VII	37.126	72	32.256	39	.731	77
.30	VIII	36.921	33	31.970	36	.934	94
.39	IX	.904	48	.788	76	.839	71
.47	X	.908	32	.667	60	.268	77
.55	XI	.703	27	.523	71	.456	97
.64	XII	.929	34	.719	55	.774	124
.72	I	.741	75	.645	83	.246	129
.81	II	.452	59	.533	64	.213	103
.88	III	.709	52	.925	54	.543	47
.97	IV	36.544	66	31.950	60	38.103	82

Servendoci di questi valori abbiamo ricavato al solito modo, tenendo distinti i risultati delle osservazioni serali da quelli del mattino, le coordinate X ed Y del Polo, una prima volta considerando solo le stazioni dell'emisfero boreale, ed una seconda includendo anche le due di La Plata ed Adelaide, conchiudendo i valori riportati nelle tabelle seguenti. Il termine residuo Z comprende logicamente non solo le correzioni da attribuire alle declinazioni medie delle stelle di ciascun gruppo, ma pur anche tutti gli effetti delle variazioni di carattere locale o generale.

Dalle sole Stazioni boreali si ebbe:

1988	Gruppi	X_s	X_m	Y_s	Y_m	Z_s	Z_m
.06	IV-V	−0″.215	−0″.206	−0″.044	+0″.014	−0″.097	+0″.063
.14	V-VI	— .114	— .145	+ .057	+ .048	+ .081	— .107
.23	VI-VII	— .116	— .170	+ .092	+ .106	— .061	— .021
.31	VII-VIII	— .114	— .067	+ .148	+ .128	+ .032	+ .044
.39	VIII-IX	— .055	— .065	+ .134	+ .178	+ .105	+ .219
.47	IX-X	— .039	— .024	+ .145	+ .168	+ .235	+ .142
.56	X-XI	+ .129	+ .120	+ .119	+ .142	+ .098	— .046
.64	XI-XII	+ .195	+ .180	+ .095	+ .154	— .058	— .087
.72	XII-I	+ .126	+ .149	+ .062	+ .062	— .094	— .064
.80	I-II	+ .054	+ .013	+ .025	— .037	— .092	+ .095
.88	II-III	— .016	— .004	— .071	— .012	+ .094	— .133
.97	III-IV	— .116	— .206	+ .014	— .090	— .101	— .034

Dalle Stazioni boreali ed australi risultò invece:

1938	Gruppi	X_s	X_m	Y_s	Y_m	Z^b_s	Z^b_m	Z^a_s	Z^a_m
.06	IV-V	— 0″.187	— 0″.215	— 0″.021	+ 0″.007	— 0″.093	+ 0″.062	— 0″.116	0″.000
.14	V-VI	— .133	— .161	+ .042	+ .034	+ .078	— .110	— .009	— .029
.23	VI-VII	— .119	— .176	+ .089	+ .101	— .065	— .026	+ .036	+ .423
.31	VII-VIII	— .128	— .088	+ .135	+ .110	+ .026	+ .038	+ .326	+ .165
.39	VIII-IX	— .034	— .071	+ .150	+ .172	+ .102	+ .212	+ .148	+ .069
.47	IX-X	— .030	— .013	+ .152	+ .177	+ .232	+ .137	+ .107	+ .007
.56	X-XI	+ .098	+ .093	+ .094	+ .119	+ .091	— .052	— .102	— .189
.64	XI-XII	+ .163	+ .141	+ .069	+ .121	— .063	— .095	— .182	+ .020
.72	XII-I	+ .093	+ .129	+ .035	+ .040	— .098	— .068	+ .053	— .115
.80	I-II	+ .040	+ .013	+ .013	— .037	— .094	+ .096	— .138	— .314
.88	II-III	— .039	— .032	— .083	— .036	+ .094	— .135	— .339	+ 021
.97	III-IV	— .142	— .201	+ .022	— .085	— .103	— .031	+ .053	— .041

Nel secondo gruppo di valori sono state tenute distinte le Z relative alle stazioni del parallelo nord da quelle corrispondenti alle stazioni australi. Non va dimenticato a questo punto che, per rendere paragonabili le Z_s con le Z_m, tenendo presente come la parte preponderante di esse è dovuta alla correzione delle declinazioni, bisogna riferirsi ai valori corrispondenti allo stesso gruppo, che appaiono nei quadri in due linee successive.

Giunti a questo punto negli anni precedenti, seguendo i metodi del Kimura, si ricavavano anzitutto i coefficienti delle variazioni di carattere locale aventi periodo annuo, e poi, liberate le osservazioni delle singole stazioni da queste piccole variazioni, si procedeva al calcolo della polodia in seconda approssimazione. Ma l'esperienza dei decorsi anni ha mostrato come simili determinazioni non possono ritenersi sicure, e come solo una serie abbastanza ampia di anni successivi possa condurre a risultati di una certa attendibilità. Per queste considerazioni parve consigliabile prescindere in questi calcoli provvisorii da simili deduzioni. Credemmo invece utile tentare di giungere ad una precisione maggiore seguendo altri criteri. I risultati degli scorsi anni ci hanno portato a concludere una serie di correzioni da applicare alle declinazioni dei diversi gruppi: riuniti allora in media quei valori, con quelli ricavati or ora e dati dalle Z e tenendo sempre distinte le deduzioni fatte dalle sole stazioni boreali da quelle tratte dal complesso delle australi e boreali, vennero corrette le latitudini istantanee osservate nelle diverse stazioni, e con i nuovi valori venne rifatta la determinazione delle coordinate X ed Y del Polo e quella del termine Z. I valori delle correzioni applicati alle latitudini furono i seguenti:

Gruppo	Stazioni boreali	Stazioni boreali ed australi	
	Correzioni decl. staz. bor.	Corr. decl. staz. bor.	Corr. decl. staz.austr.
IV	— 0″.062	— 0″.068	— 0″.081
V	+ 0 .093	+ 0 .087	+ 0 .009
VI	— 0 .070	— 0 .070	+ 0 .006
VII	— 0 .002	0 .000	+ 0 .388
VIII	+ 0 .073	+ 0 .077	+ 0 .169
IX	+ 0 .205	+ 0 .212	+ 0 .129
X	+ 0 .107	+ 0 .143	— 0 .030
XI	— 0 .046	— 0 .050	— 0 .155
XII	— 0 .080	— 0 .089	+ 0 .054
I	— 0 .097	— 0 .101	— 0 .114
II	+ 0 .105	+ 0 .097	— 0 .323
III	— 0 .132	— 0 .134	+ 0 .034

Nei due quadri seguenti si trovano le coordinate del Polo ed il termine Z ricavati con le latitudini corrette, ove giova ancor ricordare che, nel valore di Z così ottenuto, essendo ormai eliminata la parte preponderante dovuta agli errori residui delle declinazioni, si deve vedere ora essenzialmente l'effetto di un complesso di fenomeni di carattere generale, oltre la parte residua della correzione delle declinazioni medie dei diversi gruppi, e ben inteso gli errori inevitabili di osservazione.

Stazioni boreali.

1938	Gruppi	X sera	X mattina	X media	Y sera	Y mattina	Y media
.06	IV-V	—″.216	—″.214	—″.215	—″.038	+″.017	—″.011
.14	V-VI	— .117	— .145	— .131	+ .057	+ .048	+ .053
.23	VI-VII	— .116	— .182	— .149	+ .092	+ .105	+ .099
.31	VII-VIII	— .114	— .065	— .090	+ .148	+ .131	+ .140
.39	VIII-IX	— .052	— .068	— .060	+ .135	+ .178	+ .157
.47	IX-X	— .042	— .025	— .034	+ .147	+ .171	+ .159
.56	X-XI	+ .123	+ .120	+ .122	+ .116	+ .142	+ .129
.64	XI-XII	+ .194	+ .180	+ .187	+ .098	+ .154	+ .126
.72	XII-I	+ .115	+ .161	+ .138	+ .073	+ .074	+ .074
.80	I-II	+ .057	+ .012	+ .035	+ .025	— .034	— .005
.88	II-III	— .010	— .009	— .010	— .074	— .006	— .040
.97	III-IV	— .122	— .212	— .167	+ .014	— .085	— .036

Stazioni boreali ed australi.

1938	Gruppi	X sera	X mattina	X media	Y sera	Y mattina	Y media
.06	IV-V	—″.187	—″.215	—″.201	—″.019	+″.005	—″.007
.14	V-VI	— .135	— .161	— .148	+ .042	+ .035	+ .039
.23	VI-VII	— .120	— .176	— .148	+ .089	+ .101	+ .095
.31	VII-VIII	— .128	— .091	— .110	+ .136	+ .111	+ .124
.39	VIII-IX	— .033	— .069	— .051	+ .157	+ .176	+ .163
.47	IX-X	— .030	— .012	— .021	+ .157	+ .174	+ .166
.56	X-XI	+ .097	+ .093	+ .095	+ .094	+ .119	+ .107
.64	XI-XII	+ .164	+ .141	+ .153	+ .070	+ .121	+ .096
.72	XII-I	+ .093	+ .129	+ .111	+ .036	+ .044	+ .040
.80	I-II	+ .038	+ .013	+ .026	+ .012	— .030	— .009
.88	II-III	— .032	— .036	— .034	— .086	— .059	— .073
.97	III-IV	— .147	— .199	— .173	— .007	— .034	— .021

Stazioni boreali

	Z^b			
Gruppi	sera	mattina	media	$Z_s - Z_m$
IV-V	—".030	—".029	—".029	—".001
V-VI	— .016	— .037	— .026	+ .021
VI-VII	+ .009	— .022	— .006	+ .031
VII-VIII	+ .032	— .028	+ .002	+ .060
VIII-IX	+ .031	+ .014	+ .022	+ .017
IX-X	+ .034	+ .034	+ .034	.000
X-XI	— .008	+ .004	— .002	— .012
XI-XII	— .014	— .007	— .010	— .007
XII-I	— .014	+ .033	+ .009	— .047
I-II	+ .004	— .007	— .001	+ .011
II-III	— .011	+ .002	— .004	— .013
III-IV	+ .034	+ .030	+ .032	+ .004

Stazioni boreali e australi.

	Z^b				Z^a			
Gruppi	sera	mattina	media	$Z^b_s - Z^b_m$	sera	mattina	media	$Z^a_s - Z^a_m$
IV-V	—".024	—".024	—".024	".000	—".036	—".006	—".021	—".030
V-VI	— .008	— .040	— .024	+ .032	— .001	— .029	— .015	+ .028
VI-VII	+ .005	— .026	— .010	+ .031	+ .026	+ .033	+ .029	— .007
VII-VIII	+ .026	— .036	— .005	+ .062	— .053	— .005	— .029	— .048
VIII-IX	+ .028	.000	+ .014	+ .028	— .022	— .056	— .039	— .034
IX-X	— .016	— .007	— .011	— .009	— .018	+ .037	+ .010	— .055
X-XI	— .053	— .002	— .027	— .051	— .072	— .029	— .050	— .043
XI-XII	— .013	— .005	— .009	— .008	— .027	— .030	— .028	+ .003
XII-I	— .008	+ .034	+ .013	— .042	— .007	.000	— .003	— .007
I-II	+ .006	— .002	+ .002	+ .008	— .023	+ .016	— .003	— .039
II-III	— .004	— .001	— .002	— .003	— .009	— .016	— .012	+ .007
III-IV	+ .032	+ .034	+ .033	— .002	+ .010	+ .048	+ .029	— .038

Le coordinaie del Polo X ed Y ottenute nei due quadri precedenti vennero al solito riportate su di un grafico, tracciando poscia delle curve continue seguenti nel modo più fedele l'andamento dei numeri trovati; da queste curve si trassero le coordinate definitive che seguono, nel primo elenco per gli istanti identici a quelli per i quali si hanno le osservazioni dei singoli gruppi di stelle, nel secondo per istanti che distano fra loro esattamente di 0.1 di anno.

	Stazioni boreali		*Stazioni boreali ed australi*	
	X	Y	X	Y
1938.06	— 0″.202	— 0″.008	— 0″.196	— 0″.005
.14	— .160	+ .047	— .165	+ .034
.28	— .124	+ .103	— .134	+ .090
.31	— .097	+ .140	— .103	+ .128
.39	— .062	+ .157	— .058	+ .160
.47	— .020	+ .157	— .015	+ .163
.56	+ .122	+ .140	+ .091	+ .120
.64	+ .178	+ .112	+ .147	+ .088
.72	+ .138	+ .070	+ .107	+ .042
.80	+ .046	— .003	+ .030	— .015
.88	— .022	— .038	— .040	— .062
1938.97	— .167	— .034	— .173	— .030
1938.0	— 0 .156	— 0 .012	— 0 .188	— 0 .019
.1	— .183	+ .020	— .185	+ .013
.2	— .135	+ .084	— .142	+ .072
.3	— .100	+ .136	— .109	+ .125
.4	— .056	+ .158	— .052	+ .163
.5	+ .024	+ .153	+ .021	+ .150
.6	+ .162	+ .128	+ .132	+ .099
.7	+ .154	+ .084	+ .126	+ .056
.8	+ .046	— .002	+ .033	— .013
.9	— .048	— .038	— .068	— .061
1939.0	(— .202)	(— .027)	(— .200)	(— .008)

E, sempre distinguendo i valori tratti dalle due distinte deduzioni basate una sulle osservazioni delle sole stazioni boreali e l'altra sulle boreali ed australi (ma esclusa come si è detto Batavia), si ricavarono dai valori delle coordinate dell' ultimo quadro le due tabelle seguenti che danno le variazioni della latitudine nel corso del 1938 per i diversi meridiani.

Variazioni della latitudine pei diversi meridiani.

	$\lambda =$	-12^h	-10^h	-8^h	-6^h	-4^h	-2^h	0	$+2^h$	$+4^h$	$+6^h$	$+8^h$	$+10^h$	$+12^h$
Stazioni boreali	1938.0	+".16	+".15	+".09	+".01	−".07	−".13	−".16	−".15	−".09	−".01	+".07	+".13	+".16
	.1	+ .18	+ .15	+ .07	− .02	− .11	− .17	− .18	− .15	− .07	+ .02	+ .11	+ .17	+ .18
	.2	+ .14	+ .08	.00	− .08	− .14	− .16	− .14	− .08	.00	+ .08	+ .14	+ .16	+ .14
	.3	+ .10	+ .02	− .07	− .14	− .17	− .16	− .10	− .02	+ .07	+ .14	+ .17	+ .16	+ .10
	.4	+ .06	− .03	− .11	− .16	− .17	− .13	− .06	+ .03	+ .11	+ .16	+ .17	+ .13	+ .06
	.5	− .02	− .10	− .14	− .15	− .12	− .06	+ .02	+ .10	+ .14	+ .15	+ .12	+ .06	− .02
	.6	− .16	− .21	− .19	− .13	− .03	+ .07	+ .16	+ .21	+ .19	+ .13	+ .03	− .07	− .16
	.7	− .15	− .17	− .15	− .08	+ .01	+ .09	+ .15	+ .17	+ .15	+ .08	− .01	− .09	− .15
	.8	− .05	− .04	− .03	.00	+ .03	+ .04	+ .05	+ .04	+ .03	.00	− .03	− .04	− .05
	.9	+ .05	+ .06	+ .06	+ .04	.00	− .02	− .05	− .06	− .06	− .04	.00	+ .02	+ .05
	1939.0	+ .20	+ .19	+ .13	+ .03	− .07	− .15	− .20	− .19	− .13	− .03	+ .07	+ .15	+ .20
Stazioni boreali e australi	1938.0	+ .19	+ .17	+ .12	+ .02	− .08	− .15	− .19	− .17	− .12	− .02	+ .08	+ .15	+ .19
	.1	+ .18	+ .15	+ .08	− .01	− .10	− .17	− .18	− .15	− .08	+ .01	+ .10	+ .17	+ .18
	.2	+ .14	+ .08	+ .01	− .07	− .13	− .16	− .14	− .08	− .01	+ .07	+ .13	+ .16	+ .14
	.3	+ .11	+ .04	− .04	− .12	− .16	− .16	− .11	− .04	+ .04	+ .12	+ .16	+ .16	+ .11
	.4	+ .05	− .04	− .11	− .16	− .17	− .12	− .05	+ .04	+ .11	+ .16	+ .17	+ .12	+ .05
	.5	− .02	− .10	− .14	− .15	− .12	− .06	+ .02	+ .10	+ .14	+ .15	+ .12	+ .06	− .02
	6.	− .13	− .16	− .16	− .10	− .02	+ .06	+ .13	+ .16	+ .16	+ .10	+ .02	− .06	− .13
	.7	− .13	− .14	− .12	− .06	+ .02	+ .08	+ .13	+ .14	+ .12	+ .06	− .02	− .08	− .13
	.8	− .03	− .02	− .01	+ .01	+ .03	+ .04	+ .03	+ .02	+ .01	− .01	− .03	− .04	− .03
	.9	+ .07	+ .09	+ .09	+ .06	+ .01	− .03	− .07	− .09	− .09	− .06	− .01	+ .03	+ .07
	1939.0	+ .20	+ .18	+ .11	+ .01	− .09	− .16	− .20	− .18	− .11	− .01	+ .09	+ .16	+ .20

La traiettoria del Polo appare poi dalle due figure in cui, al solito, con tratto pieno è distinta la polodia dell'anno 1938, mentre è punteggiata quella dei due precedenti anni.

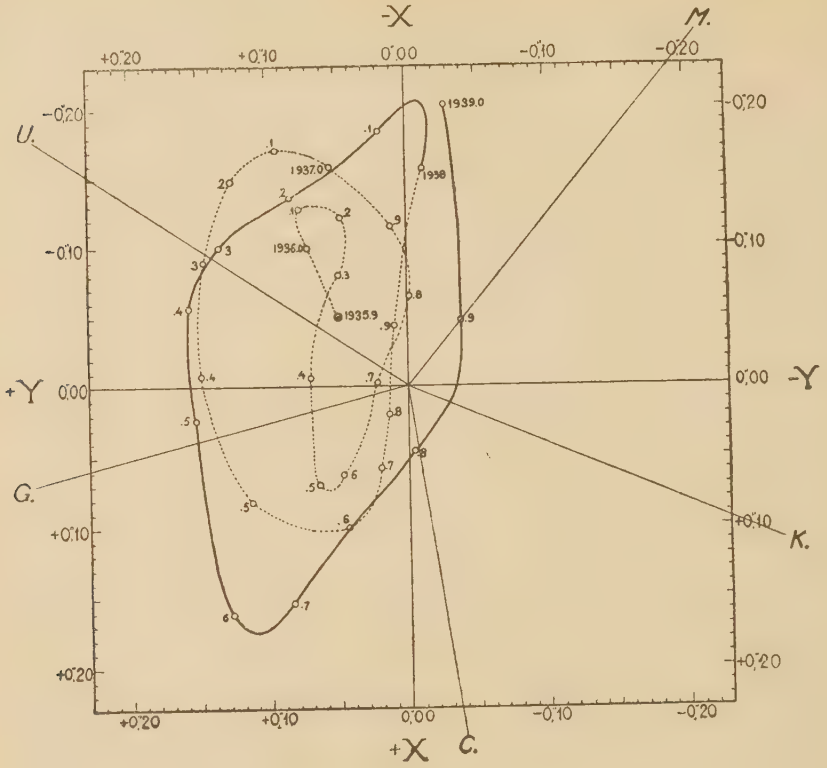


Fig. 1.

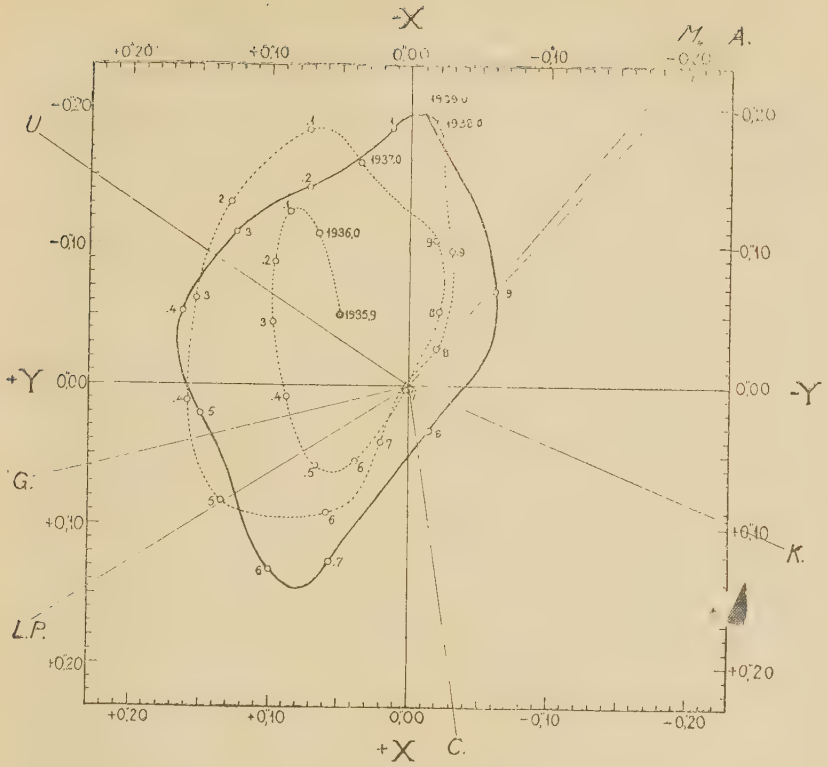


Fig. 2.

In una nota seguente comparirà lo studio ulteriore dei termini residui che presentano le diverse stazioni.

Al complesso dei calcoli, compreso quello delle effemeridi, attese come negli anni precedenti il personale dell' Ufficio delle latitudini con l'abituale cura e diligenza e senza subire variazione alcuna nella sua composizione.

CARLO FABRIZIO PARONA

Commemorazione letta dal socio ordinario **Geremia D' Erasmo**

nell' adunanza del dì 7 giugno 1939 - XII

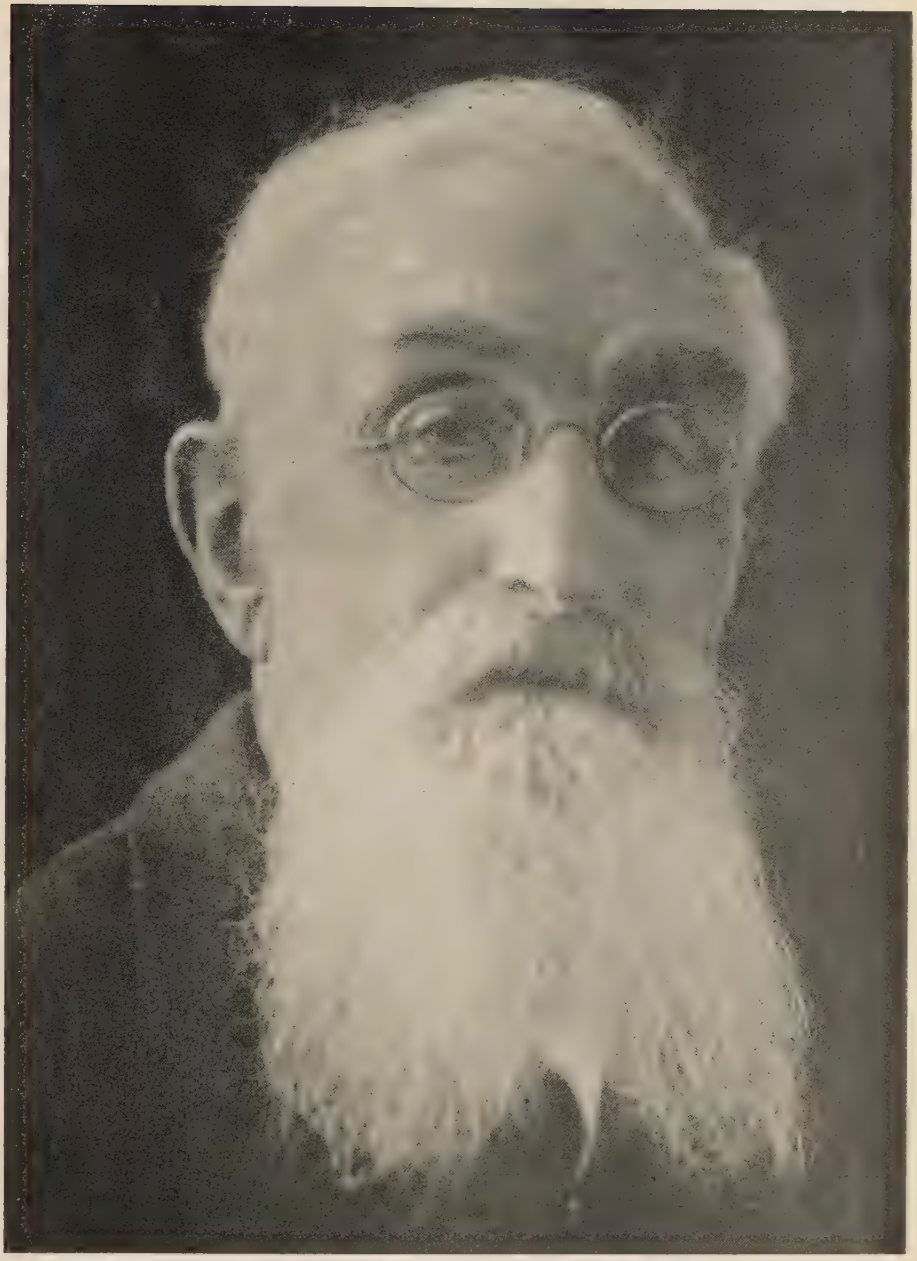
Il 15 gennaio scorso si è spento serenamente in Busto Arsizio, presso i figli ed i nipoti, in compagnia dei quali aveva voluto trascorrere, come al solito, le feste di Natale e di Capodanno, il decano fra i nostri soci corrispondenti, Carlo Fabrizio Parona.

Di nobile famiglia pavese, Egli era nato a Melegnano il dì 8 maggio 1855, da Angelo, Consigliere di Corte d' Appello, e da Teresa Scardini. Dopo aver conseguita la laurea in Scienze naturali nell'Università di Pavia nel 1878, rimase per oltre un decennio in quell'Istituto di Geologia in qualità di assistente di Torquato Taramelli, e tenne nello stesso tempo l'insegnamento delle Scienze naturali nell'Istituto tecnico di Pavia. Pote così coltivare e sviluppare le sue innate doti di acuto e diligente osservatore e di chiaro ed efficace insegnante e formarsi, sotto la dotta e paterna guida del Taramelli, un cospicuo bagaglio scientifico nei diversi rami della geologia e della paleontologia, che gli permise di vincere, nel 1889, il concorso per la cattedra di geologia nell'Università di Torino. Tale cattedra Egli tenne con sommo onore per un quarantennio, dal 1890 al 1930, lavorando indefessamente nel prediletto campo delle indagini paleontologiche, ampliando ed arricchendo il Museo affidato alle sue cure, educando alla ricerca scientifica una numerosa schiera di allievi, che, sparsasi poi in tutta l'Italia, riconosceva sempre in Lui il buon consigliere, il valido protettore, il dotto maestro, il venerato Padre spirituale.

L'opera scientifica di C. F. Parona, assai vasta e complessa, è dimostrata da più di duecento note e memorie, le quali abbracciano un periodo di 60 anni e possono distribuirsi, per la materia trattata, in parecchi gruppi, che ho cercato di mettere in evidenza nell' annesso elenco bibliografico.

Di tali gruppi il più cospicuo è senza dubbio quello paleontologico: chè sommo paleontologo Egli fu, di quelli che per l'accuratezza delle descrizioni, per la larghezza dei confronti, per l'esattezza delle illustrazioni, per l'importanza dei risultati, per la sagacia delle applicazioni stratigrafiche e paleogeografiche s' impongono all' ammirazione altrui e lasciano un' orma profonda della propria personalità scientifica.

Numerosi furono i tipi animali dei quali descrisse i resti fossili con



CARLO FABRIZIO PARONA

nato a Melegnano il dì 8 maggio 1855 morto a Busto Arsizio il 15 gennaio 1939

acuta perizia e assoluto rigore di espressione: chè se, sopratutto nel campo dei molluschi e dei brachiopodi, e segnatamente in quello delle rudiste, può a buon diritto considerarsi uno specialista, anche di diatomee, di radiolari, di spugne, di celenterati, di pesci, di mammiferi e di avanzi problematici trattò ugualmente con la competenza dell'indagatore provetto, giungendo a notevoli affermazioni sull'età controversa di numerose formazioni.

Fra tali studi hanno maggiore importanza sopratutto quelli relativi alla illustrazione delle faune mesozoiche di varie regioni dell'Italia e delle nostre colonie africane: a cominciare dai primi lavori giovanili sulle colline dell'Oltrepo pavese, sul calcare di Gozzano, sul Giurassico del veronese, sul Lias dell'Umbria, sulla fauna raibliana di Lombardia, su quella calloviana di Acque Fredde presso il lago di Garda, fino alle più recenti ricerche sul Malm della Savoia, sull'Albiano del Nizzardo, sul calcare cretaceo dei monti d'Ocre in Abruzzo, su quello con Ellipsactinidi dell'isola di Capri, sui fossili turoniani della Tripolitania, ecc. Ma, pur essendo sommo conoscitore della fauna secondaria, Parona non trascurò particolari ricerche sopra faune carbonifere e permiane, come quelle del monte Pizzul in Carnia e di Palazzo Adriano in Sicilia, o studi occasionali su fossili miocenici del Piemonte e della Sardegna o sopra resti pliocenici della Lombardia.

Fra le pazienti indagini relative allo studio dei radiolari meritano di essere ricordate quelle sui noduli selciosi del Giurassico di Laveno, sugli scisti triassici della Lucania, sulle rocce diasproidi di Cesana torinese e sui diaspri permiani di Montenotte in Liguria. Fra i lavori riflettenti le spugne fossili si possono citare quelli sulla fauna permiana del bacino del Sosio in Sicilia e su quella cretacea della Somalia; e, per quanto riguarda i brachiopodi, appaiono particolarmente notevoli gli studi sopra i giacimenti di Saltrio e Arzo nelle Prealpi lombarde, della Croce di Segau in val di Brenta, di Lauriano, di Palazzo Adriano in Sicilia ecc. Ma tutte queste ricerche sono ben piccola cosa in confronto del cospicuo gruppo di pubblicazioni riguardanti i molluschi in genere e le rudiste in ispecie: gruppo ricco di più di una cinquantina di note e memorie diverse, le quali basterebbero da sole a dare chiara fama d'insigne paleontologo al Nostro commemorato, e di cui non si può apprezzare tutta l'importanza senza scendere a dettagli sulle numerose questioni risolte e sulle notevoli dimostrazioni fornite, tanto d'indole stratigrafica e cronologica, quanto di carattere biologico e filogenetico.

Ma, per mettere in opportuno rilievo la varietà dei contributi da Lui portati alle discipline con tanto amore coltivate, è necessario tener presenti altri lavori. Con intelletto e competenza di geologo si occupò dei terreni del bacino del lago d'Orta, della val Sesia, della dolomia di Arona, della serie giurassica e cretacea della Lombardia, del Sopracretaceo dell'Abruzzo aquilano, della zona delle Pietre Verdi nelle Alpi occidentali, del Titonico presso Parenzo in Istria, del sottosuolo della pianura di Novara, della geomorfologia della Tripolitania settentrionale e dell'alto Uebi Scebeli, ecc. Atte-

nendosi sempre fedelmente alla documentazione di cui può disporre il geologo, senza dedurne più di quanto sia scientificamente possibile, Egli non nascose mai, in tutti i suoi lavori geologici, « i dubbi, le incertezze, le lacune, la scarsità o la mancanza di documenti a chiarire l'origine e l'età di molti terreni », e seppe pertanto evitare « il lavoro di fantasia e di conseguenza il pericolo, non facilmente evitabile, nè sempre evitato anche in geologia, di tracciare, anzichè una esposizione di fatti, una storia geologica romanzata ».

Di sua iniziativa, o per incarichi che gli venivano dal generale riconoscimento della sua grande dottrina nel campo della tecnica, si occupò pure di varie applicazioni geologiche: per tracciati ferroviari, sorgenti termominerali, acquedotti, ricerche di geoagrologia ecc. L'importanza, che la nostra scienza può avere per la risoluzione di svariate questioni di grande interesse teorico e pratico, è messa chiaramente in luce nella estesa trattazione sopra « Il terreno », lavoro inserito nella Nuova Enciclopedia agraria italiana, in cui spiccano le sue precipue doti di scienziato e di maestro dalle larghe vedute, dalla chiara ed ordinata esposizione, dallo squisito senso di arte e di italianità: doti che dovevano poi maggiormente rifulgere nel suo classico « Trattato di Geologia », che ebbe, nelle sue due edizioni del 1901 e del 1924, la più favorevole accoglienza in tutte le nostre Università.

Educato alla scuola dello Stoppani e del Taramelli, amava le bellezze naturali della nostra terra, perchè « le menti meditative », come Egli diceva, « sentono il fascino degli sconfinati liberi spazi, dove, nella purezza eccitante dell'atmosfera serena, lo spirito si eleva nel pensiero, il corpo si rinvigorisce e l'uomo si fa e si sente migliore moralmente e fisicamente ». Il suo occhio indagatore lo portava a darsi ragione dei mutevoli caratteri del paesaggio da luogo a luogo; sicchè ne scriveva con accenti di appassionato contemplatore ed esteta e con convinzione di sagace e riflessivo analizzatore. Fanno parte di questo gruppo di lavori a carattere paesistico, ma con fondo sempre più o meno geologico, le sue « Impressioni di Tripolitania », i « Caratteri ed aspetti geologici del Piemonte », il « Piemonte ed i suoi paesaggi », le « Rievocazioni e visioni istriane », ecc.

Infine, tra gli articoli di volgarizzazione e di storia della scienza, scritti per lo più durante gli ozi della villeggiatura e che ugualmente rivelano la sua mente acuta e sagace, il temperamento riflessivo e specialmente la lucidità delle sue idee, sono da ricordare quelli sulle variazioni periodiche dei ghiacciai, sull'opera del Club Alpino Italiano in rapporto agli studi geologici, sul contributo portato alla litogenesi dai piccoli organismi, sugli avanzi organici che possono costituire un deposito di spiaggia marina, sulle curiosità naturali, sul linguaggio delle pietre ecc.

Accuratissimo nella ricerca bibliografica e profondo conoscitore dei contributi portati dagli altri alle indagini delle quali Egli si occupava, non disdegnò la compilazione di estese bibliografie geologiche e paleontolo-

giche, fra le quali meritano di essere ricordate, per la loro più vasta mole e per l'utilità che hanno portata alle ulteriori ricerche, quella sulle rudiste, e quelle regionali sul Piemonte (in collaborazione con Sacco e Virgilio) e sull'Istria (con Battaglia e Sacco).

La lunghissima serie delle necrologie da Lui fatte per ricordare nelle varie Accademie, di cui era autorevole componente, i meriti di insigni colleghi, italiani o stranieri, scomparsi, mentre dimostra i legami di schietta amicizia e di profondo affetto che lo legavano ai più eminenti scienziati e maestri, ci permette di intravedere — come con nobiltà di espressioni ebbe a rilevare Federico Sacco, commemorandolo alla R. Accademia delle Scienze di Torino — sotto la veste dell'uomo di scienza, le intime qualità dell'animo nobile, dell'uomo di cuore che sentì tanto altamente quanto profondamente.

Schivò gli onori, ma questi vennero a Lui — forse in misura minore di quanto li meritasse — per generale riconoscimento degli alti suoi meriti scientifici e della stima e del prestigio che seppe acquistare presso i colleghi. Preside della Facoltà di Scienze dal 1919 al 1920 e Rettore della R. Università di Torino dal 1920 al 1922, fu presidente della Commissione Ministeriale per lo studio geoagrologico della Libia (1913), della Commissione per lo studio delle variazioni periodiche dei ghiacciai (1910-13), della Società geologica italiana (1901 e 1913), del R. Comitato geologico d'Italia (1908-25). Le maggiori Accademie italiane lo vollero socio: così la R. Accademia nazionale dei Lincei, che nel 1904 gli aveva conferito il premio reale per la geologia e la paleontologia, la R. Accademia delle Scienze di Torino, che lo ebbe presidente dal 1928 al 1934, il R. Istituto Lombardo di Scienze, Lettere ed Arti, che gli aveva premiata l'opera sulla fauna raibliana della Lombardia, la Società italiana delle Scienze (detta dei XL), la R. Accademia di Agricoltura di Torino, la R. Accademia delle Scienze di Modena, il R. Istituto Veneto, la R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, l'Ateneo di Brescia, ecc. Apparteneva alla nostra Accademia, in qualità di socio corrispondente della Sezione di Scienze naturali, dal dì 11 febbraio 1905.

In conseguenza delle svariate ed importanti cariche occupate, tenne numerosi discorsi e relazioni e fu chiamato a giudicare molteplici concorsi a premio. Gentile con gli amici, paterno con gli allievi, affabile e servizievole con tutti, era felice di prestare il consiglio della sua esperienza e della sua dottrina a quanti ricorrevano a Lui per le più difficili questioni, e specialmente per la determinazione di fossili mesozoici. Basta, a dimostrarlo, consultare il numeroso elenco delle sue comunicazioni paleontologiche contenute in lavori di altri studiosi. Per questi rapporti di cordialità che ebbe con numerosi colleghi, amici, allievi e raccoglitori diversi, e per la vasta scuola geo-paleontologica piemontese che sotto la sua guida fiorì per oltre un quarantennio con numerosi lavori degni del Maestro, Egli potè arricchire il Museo torinese di preziose collezioni, tra cui tengono il primo posto quelle

italiane, sistemate in apposita sala, nella quale sono distribuiti in ordine cronologico e geografico i fossili di tutte le regioni del nostro paese, studiati da lui e dai suoi allievi.

Quando, nel 1930, per raggiunti limiti di età, fu collocato a riposo, non permise che colleghi, amici e discepoli, per offrirgli quasi un segno tangibile di ammirazione e di affetto, gli tributassero le progettate onoranze; ma, assolutamente contrario, per la sua somma modestia, a manifestazioni di tal genere, consentì solo la pubblicazione di un fascicolo contenente, insieme col ritratto, la sintesi nominale della sua opera scientifica. Nè la sua attività venne a cessare o diminuì con l'allontanamento dall'insegnamento ufficiale; perchè negli ultimi anni, frequentando come semplice studioso l'Istituto geologico torinese che tanto sapientemente aveva diretto, o raccogliendosi nell'Accademia delle Scienze alla quale donò poi la sua ricca biblioteca privata, Egli potè mandare a termine ancora una quarantina di lavori e note diverse, che attestano la sua lucida e feconda attività ed il suo infinito amore per la scienza fino alla più tarda vecchiaia.

A Lui, indefesso lavoratore, scienziato eminente, maestro impareggiabile, cittadino e padre esemplare, possono bene applicarsi le parole che Egli stesso, commemorando il suo indimenticabile e diletto Maestro Taramelli aveva pronunziate ai Lincei nel 1923: « Fu maestro buono nel significato più nobile della parola; modesto nella vita e nelle abitudini, entusiasta della scienza che professava e di essa profondo conoscitore ed appassionato divulgatore. Egli comunicava agli scolari il suo fervore per la geologia e la paleontologia; e come fece del nostro paese il campo preferito dei suoi studi, così della Patria fece l'oggetto della sua alta e pura passione. Quanto insigne fu lo scienziato, altrettanto benemerito fu il cittadino: meriti e virtù, che valsero a dare particolare risalto al suo insegnamento, durato mezzo secolo... Egli lascia esempio e gradito ricordo di una vita intemerata, laboriosa ed utile, e un nome saldamente affidato a complessa opera scientifica, contraddistinta da originalità di pensiero, che la scienza italiana ricorderà spesso e a lungo fra gli elementi fattivi del suo progresso ».

Pubblicazioni di **Carlo Fabrizio Parona**

Geologia

1. *Appunti geologici sul bacino del Lago d' Orta.* Novara, Soc. Archeol. Novarese, maggio 1880.
2. *Nota geologica sulla Valle Strona nel bacino del Lago d' Orta.* Riv. Alp. Ital., vol. II., 1883.
3. *Sopra i lembi pliocenici situati tra il bacino del Lago d' Orta e la Val Sesia e sull' altipiano di Boca e di Maggiora.* Boll. Soc. Geol. Ital., vol. II. Roma, 1883.
4. *Valsesia e Lago d' Orta, descrizione geologica.* Atti Soc. It. di Sc. Nat. vol. XXIX. Milano, 1886.
5. *Sull' età della dolomia di Arona.* Rend. R. Ist. Lomb., serie 2.ª, vol. XXV. Milano, 1892.
6. *Appunti per lo studio del Lias lombardo.* Rend. R. Ist. Lomb., serie 2.ª, vol. XXVII. Milano, 1894.
7. *Considerazioni sulla serie del Giura superiore e dell' Infracretaceo in Lombardia, a proposito del rinvenimento di fossili del piano Barremiano.* Rend. R. Ist. Lomb., serie 2.ª, vol. XXIX. Milano, 1896.
8. *La Collina di Cavoretto studiata dal geologo.* Cavoretto-Album (Numero unico), ottobre 1903.
9. *Risultati di uno studio sul Cretaceo superiore dei Monti di Bagno presso Aquila.* Rend. R. Acc. Lincei, serie 5.ª, vol. XVI. Roma, 1907.
10. *Notizie sommarie di Geologia Valsesiana.* (Nel volume: *La Valsesia*, pubbl. dal C. A. I., sezione di Varallo). Torino, Paravia e C., 1907.
11. *A proposito dei caratteri micropaleontologici di alcuni calcari mesozoici della Nurra in Sardegna.* Atti R. Acc. Sc., vol. XLV. Torino, 1910.
12. *Sull' età da assegnare alla zona delle Pietre verdi nella carta geologica delle Alpi occidentali. Relazione al R. Comitato Geol.* Boll. R. Comit. Geol., vol. XLII. Roma, 1911.
13. *Affioramento di Titonico con Diceras Luci presso Parenzo in Istria.* Rend. R. Acc. Lincei, Cl. Sc. fis., serie 5.ª, vol. XXI. Roma, 1912.
14. *La Tripolitania settentrionale.* Relazione al Ministero delle Colonie. Vol. I e II (in collaborazione con altri). Roma, Tip. Naz. Bertero, 1913.
15. *Sulla serie dei terreni della Tripolitania settentrionale.* (In collab. con C. Crema e S. Franchi). Boll. Soc. geol. it., vol. XXXII. Roma, 1914.
16. *Notizie paleontologiche sulla serie dei terreni attraversati dal pozzo trivellato della Scuola di Agricoltura presso Tripoli.* Boll. R. Comit. Geol., vol. XLIV. Roma, 1914.
17. *Impressioni di Tripolitania. Osservazioni geomorfologiche sulla Gefara.* Natura, vol. VI. Milano, 1915.

18. *Caratteri ed aspetti geologici del Piemonte.* Torino, S. Lattes e C., 1921.
19. *Il Gebel Tripolitano e la sua fronte sulla Gefara.* Riv. della Tripolitania, Anno II, N. 5. Roma, 1926.
20. *Il Pliocene marino nel sottosuolo della pianura presso Novara.* Atti R. Acc. Sc., vol. LXIII. Torino, 1928.
21. *Affioramento di terreni mesozoici presso Lauriano Po nelle Colline di Torino.* Atti R. Acc. Sc., vol. LXV. Torino, 1930.
22. *Qualche considerazione geomorfologica sul corso dell' Alto Uebi-Scebeli.* Relaz. estratta dal vol. di S. A. R. il Duca degli Abruzzi, *La esplorazione dell' Uabi-Uebi Scebeli, 1928-29*, pagg. 307-318, con 21 Tav., 1932.

Geologia applicata

23. *Considerazioni geoidrologiche sui risultati ottenuti colle perforazioni fatte nel sottosuolo di Vercelli per derivare acque potabili.* Vercelli, Tip. Chiais, 1904.
24. *Relazione della Commissione per l' esame dei diversi progetti d' una comunicazione ferroviaria diretta tra Torino e la Svizzera per la valle di Aosta e Martigny. Considerazioni geologiche.* Atti Soc. Ing. e Arch. in Torino, Anno XXXIX, fasc. 7-8, 1905.
25. *Sulle sorgenti termo-minerali di Caldiero.* Relazione al Sindaco di Verona (In: E. Nicolis, *Intorno alle ricerche intraprese dal Comune di Verona*, ecc.). Giornale di Geol. pratica, vol. VI. Bologna, 1908.
26. *Condizioni geologiche del tracciato della ferrovia in progetto Alta Val Pellice-Roia-Cave.* Pinerolo, Tip. Sociale, 1909.

Paleontologia:

a) Faune.

27. *Il Pliocene dell' Oltrepo pavese. Osservazioni stratigrafiche e paleontologiche.* Atti Soc. It. di Sc. Nat., vol. XXI. Milano, 1879.
28. *Di alcuni fossili titonici dei dintorni di Caprino e di Longarone nel Veneto.* Atti R. Ist. Veneto, s. 5.ª, vol. VI. Venezia, 1880.
29. *I fossili degli strati a Posidonomya alpina di Camporovere nei Sette Comuni.* Atti Soc. It. di Sc. Nat., vol. XXIII. Milano, 1880.
30. *Il calcare liassico di Gozzano ed i suoi fossili.* Mem. R. Acc. dei Lincei, Cl. Sc. fis., serie 3.ª, vol. VIII. Roma, 1880.
31. *Di alcuni fossili del Giura superiore raccolti nelle Alpi Venete occidentali.* Rend. R. Ist. Lombardo, serie 2.ª, vol. XIV. Milano, 1881.
32. *Sopra due piani fossiliferi del Lias nell' Umbria.* Rend. R. Ist. Lomb., serie 2.ª, vol. XV. Milano, 1882.
33. *Contributo allo studio della fauna liassica dell' Appennino centrale.* Mem. R. Acc. dei Lincei, Cl. Sc. fis., serie 3.ª, vol. XV. Roma, 1883.

34. *Esame comparativo della fauna dei vari lembi pliocenici lombardi.* Rend. R. Ist. Lomb., serie 2.ª, vol. XVI. Milano, 1883.
35. *Sopra alcuni fossili del Lias inferiore di Carenno, Nese ed Adrare nelle Prealpi bergamasche.* Atti Soc. It. di Sc. Nat., vol. XXVII. Milano, 1884.
36. *Note stratigrafiche e paleontologiche sul Giura superiore della provincia di Verona* (in collab. con E. Nicolis). Boll. Soc. Geol. Ital., vol. IV. Roma, 1885.
37. *Fossili tortoniani di Capo S. Marco in Sardegna* (in collab. con E. Mariani). Atti Soc. It. di Sc. Nat., vol. XXX. Milano, 1887.
38. *Appunti per la paleontologia miocenica della Sardegna.* Boll. Soc. Geol. It., vol. VI. Roma, 1887.
39. *Note paleontologiche sul Lias inferiore nelle Prealpi Lombarde.* Rend. R. Ist. Lomb., serie 2.ª, vol. XXII. Milano, 1889.
40. *Studio monografico della fauna raibliana di Lombardia.* Mem. premiata dal R. Ist. Lombardo di Sc. e Lettere al concorso ordinario Cagnola· Pavia, Tip. F.lli Fusi, 1889.
41. *Sopra alcuni fossili del Biancone veneto.* Atti R. Ist. Veneto, serie 7.ª, vol. I. Venezia, 1890.
42. *Brevi notizie sulla fauna carbonifera del Monte Pizzul in Carnia.* Boll. Soc. Geol. It., vol. IX. Roma, 1890.
43. *Fossili del Lias medio del conglomerato terziario di Lauriano (Colli di Torino).* Atti R. Acc. Sc., vol. XXVI. Torino, 1891.
44. *Revisione della fauna liassica di Gozzano in Piemonte.* Mem. R. Acc. Sc., serie 2.ª, tomo XLIII. Torino, 1892.
45. *La fauna fossile (calloviana) di Acque Fredde sulla sponda del Lago di Garda.* Mem. R. Acc. dei Lincei, Cl. Sc. fis., s. 4.ª, vol. VII. Roma, 1894.
46. *Sur la faune du Callovien inférieur (Chanasien) de Savoie* (in collab. con G. Bonarelli). Mém. de l'Acad. de Savoie, serie 4.ª, tome VI. Chambéry, 1895.
47. *Nuove osservazioni sopra la fauna e l'età degli strati con Posidonomya alpina nei Sette Comuni.* Palaeontographia italica, vol. I. Pisa, 1895.
48. *La fauna pliocenica di Castenedolo* [in: G. B. Cacciamali, *Geologia della collina di Castenedolo*, ecc.]. Comment. Ateneo di Brescia, 1896.
49. *Fossili albiani d'Escragnolles, del Nizzardo e della Liguria occidentale* (in collab. con G. Bonarelli). Palaeontogr. italica, vol. II. Pisa, 1896.
50. *Fauna del Cretaceo di Colle Pagliare presso Aquila.* Boll. Soc. Geol. it., vol. XVI. Roma, 1897.
51. *Osservazioni sulla fauna e sull'età del calcare di scogliera presso Colle Pagliare nell'Abruzzo aquilano.* Atti R. Acc. Sc., vol. XXXIV. Torino, 1899.
52. *Nuove osservazioni sulla fauna dei calcari con Ellipsactinidi dell'isola di Capri.* Rend. R. Acc. Lincei, Sc. fis., serie 5.ª, vol. XIV. Roma, 1904.

53. *Appunti per lo studio del Cretaceo superiore nell'Appennino.* Boll. Soc. Geol. Ital., vol. XXIV. Roma, 1904.
54. *Fossili turoniani della Tripolitania.* Rend. R. Acc. Lincei, Sc. fis., serie 5.ª, vol. XV. Roma, 1906.
55. *Nuovi dati paleontologici sui terreni mesozoici dell'Abruzzo.* Boll. R. Comit. Geolog., vol. XXXIX. Roma, 1908.
56. *La fauna coralligena del Cretaceo dei Monti d'Ocre nell'Abruzzo aquilano* (in collab. con C. Crema e P. L. Prever). Mem. per servire alla descrizione della Carta geologica d'Italia, vol. V, p. I. Roma, 1909.
57. *Per la geologia della Tripolitania.* Atti R. Acc. Sc., vol. L. Torino, 1914.
58. *Faune cretaciche del Caracorùm e degli Altopiani tibetani.* Rend. R. Acc. Lincei, Cl. Sc. fis., serie 5.ª, vol. XXVI. Roma, 1917.
59. *Ragguagli sopra gli ossami fossili trovati in una tomba presso Anteopolis (Monti di Gau, Alto Egitto).* Atti R. Acc. Sc., vol. LIII. Torino, 1918.
60. *Titonico e cretacico nell'isola di Capri. Revisione dei fossili dei calcari coralligeni.* Rend. R. Acc. Lincei, Cl. Sc. fis., s. 5.ª, vol. XXVIII. Roma, 1919.
61. *Arenarie e calcari marnosi con fossili giurassici nei dintorni di Macallé (Tigrè).* Natura, vol. XV. Milano, 1924.
62. *Faunette triassiche del Caracorùm e degli Altopiani tibetani.* [In: Spedizione Italiana De Filippi nell'Himalaia, Caracorùm e Turchestan (1913-914), serie 2.ª, vol. VI]. Bologna, Zanichelli, 1927.
63. *Faune cretaciche del Caracorùm e degli Altopiani tibetani.* [In: Spedizione Ital. De Filippi nell'Himalaia, Caracorùm e Turchestan (1913-14), serie 2.ª, vol. VI]. Bologna, Zanichelli, 1927.
64. *Spigolature paleontologiche.* Boll. R. Uff. Geol., vol. LIII, N. 8. Roma, 1928.
65. *Appunti sui fossili raccolti al Caracorùm durante le esplorazioni F. De Filippi (1913-14) e Giotto Dainelli (1929).* Atti R. Acc. Sc., vol. LXVIII. Torino, 1932.
66. *Osservazioni sul « Permosoma tunicatum » Jaekel della fauna permiana di Sicilia (Palazzo Adriano) e rivista sommaria della fauna stessa in rapporto colle faune coeve.* Atti R. Acc. Sc., vol. LXVIII. Torino, 1933.

b) Radiolari.

67. *Radiolarie nei noduli selciosi del calcare giurese di Cittiglio presso Laveno.* Boll. Soc. Geol. It., vol. IX. Roma, 1890.
68. *Sulle roccie diasproidi a Radiolari di Cesana presso il Monginevro.* Rend. R. Ist. Lombardo, serie 2.ª, vol. XXIV. Milano, 1890.
69. *Note sur les schistes silicieux à Radiolaires de Cesana, près du Mont Genèvre.* (Trad. de M. Lachat). Bull. Soc. d'Hist. Nat. de Savoie, VI, 1892.
70. *Sugli scisti silicei a Radiolarie di Cesana presso il Monginevro.* Atti R. Acc. Sc., vol. XXVII. Torino, 1892.

71. *Radiolarie negli scisti silicei (Trias superiore).* In: De Lorenzo G., *Sul Trias dei dintorni di Lagonegro in Basilicata.* Atti R. Acc. Sc., serie 2.ª, vol. V. Napoli, 1893].
72. *Diaspri permiani a Radiolarie di Montenotte (Liguria occidentale)* (in collab. con G. Rovereto). Atti R. Acc. Sc., vol. XXXI. Torino, 1895.

c) Poriferi.

73. *Appunti per uno studio sulle « Spugne » del Permiano di Sicilia (Bacino del Sosio).* Atti R. Acc. Sc., vol. LXIV. Torino, 1929.
74. *Le spugne della fauna permiana di Palazzo Adriano (Bacino del Sosio) in Sicilia.* Mem. Soc. Geol. It., vol. I. Roma, 1931.
75. *Avanzi di Poriferi del Cretaceo della Somalia.* Palaeontographia Italica, vol. XXXII (n. s., vol. II). Pisa, 1932.

d) Celenterati.

76. *Di alcuni idrozoi del Giurassiso e Cretacico in Italia.* Mem. R. Acc. Sc., serie 2.ª, tomo LXVII. Torino, 1932.

e) Brachiopodi.

77. *Brachiopodi oolitici di alcune località dell' Italia settentrionale* (in collab. con M. Canavari). Atti Soc. Tosc. Nat., vol. V. Pisa, 1882.
78. *I Brachiopodi liassici di Saltrio e Arzo nelle Prealpi Lombarde.* Rend. R. Ist. Lomb., serie 2.ª, vol. XVII; Mem. R. Ist. Lomb. (Sc. fis.), vol. XV (serie 3.ª, vol. VI). Milano, 1884.
79. *Sull' età degli strati a Brachiopodi della Croce di Segan in Val Tesino (V. di Brenta).* Proc. verb. Soc. Tosc. di Sc. Nat. Pisa, 1885.
80. *Nuove osservazioni sui massi di calcare rosso a Brachiopodi del Lias medio compresi nelle argille scagliose di Lauriano.* Atti R. Acc. Sc., vol. XXXVIII. Torino, 1903.
81. *Sulla Koninckina? gregaria Par.* (In: Repossi E., *La tectonica dei terreni secondari tra Como ed Erba*). Boll. R. Uff. Geol., vol. LI, n. 8. Roma, 1926.
82. *Le Lyttonia fra i Brachiopodi della fauna permiana di Palazzo Adriano in Sicilia.* Mem. R. Acc. Sc., serie 2.ª, tomo LXVII. Torino, 1933.

f) Molluschi (in generale).

83. *Contribuzione allo studio della fauna liassica in Lombardia.* Rend. R. Ist. Lomb., serie 2.ª, vol. XII. Milano, 1879.
84. *Contributo allo studio dei Megalodonti.* Atti Soc. It. di Sc. Nat., vol. XXX. Milano, 1888.

85. *I fossili del Lias inferiore di Saltrio in Lombardia. Parte I: Bivalvi.* Atti Soc. It. di Sc. Nat., vol. XXXIII. Milano, 1890.
86. *Descrizione di alcuni fossili miocenici di Sardegna.* Atti Soc. It. di Sc. Nat., vol. XXXIV. Milano, 1892.
87. *I fossili del Lias inferiore di Saltrio in Lombardia. Parte II: Gasteropodi.* Boll. Soc. Malacologica It., vol. XVIII. Milano, 1894.
88. *Nuovi generi di Ammoniti giuresi.* Rend. R. Ist. Lomb., serie 2ª, vol. XXVIII. Milano, 1895.
89. *I fossili del Lias inferiore di Saltrio in Lombardia. Parte III. Nautili.* Boll. Soc. Malacologica It., vol. XX. Milano, 1896.
90. *Contribuzione alla conoscenza delle Ammoniti liassiche di Lombardia. Parte I. Ammoniti del Lias inferiore di Saltrio.* Mém. Soc. Paléont. Suisse, vol. XXIII. Genève, 1896.
91. *Contribuzione alla conoscenza delle ammoniti liassiche di Lombardia. Parte II. Di alcune Ammoniti del Lias medio.* Mém. Soc. Paléont. Suisse, vol. XXIV. Genève, 1896.
92. *Descrizione di alcune Ammoniti del Neocomiano veneto.* Palaeontographia Italica, vol. III. Pisa, 1897.
93. *Note sui Cefalopodi terziari del Piemonte.* Palaeontographia Italica, vol. IV. Pisa, 1898.
94. *Contribuzione alla conoscenza delle Ammoniti liassiche di Lombardia. Parte III. Ammoniti del calcare nero di Moltrasio, Careno, Civate nel bacino lariano.* Mém. de la Soc. Paléont. Suisse, vol. XXV. Genève, 1898.
95. *La Donax sulcata Br. non è un fossile pliocenico.* Boll. Soc. Geol. It., vol. XX. Roma, 1901.
96. *Sulla presenza dei calcari a Toucasia carinata nell'isola di Capri.* Rend. R. Acc. Lincei, Cl. Sc. fis., serie 5ª, vol. XIII. Roma, 1904.
97. *Sulla fauna e sull'età dei calcari a Megalodonti delle cave di Trevi (Spoleto).* Atti R. Acc. Sc., vol. XLI. Torino, 1906.
98. *Osservazioni sulla piccola Grifea (Liogryphaea Franchii n. f.) del calcare di Alghero.* Boll. R. Comit. Geol., vol. XLI. Roma, 1910.
99. *Pterocardium corallinum (Leym.) nei calcari bianchi di scogliera della Valle del Sagittario.* (In: P. Zuffardi, *Escursione alle gole del Sagittario e a Scanno*). Boll. Soc. Geol. It., vol. XXXII. Roma, 1913.
100. *Fauna del Neocretacico della Tripolitania.* Parte II: *Lamellibranchi.* Mem. descr. Carta Geol. d'Italia, vol. VIII, parte 4ª. Roma, 1923.
101. *Nuove osservazioni sui calcari con « Heterodiceras Luci » della costa Parentina in Istria.* Rend. R. Acc. Lincei, Cl. Sc. fis., serie 6ª, vol. I. Roma, 1925.
102. *Breve relazione sulla collezione dei Megalodonti del Museo di Storia Naturale in Trento.* Studi trentini di Sc. Nat., anno XI. Trento, 1930.
103. *I fossili del Giura superiore di Cima Campo nell'Altipiano di La-*

varone. Mem. del Museo di St. Nat. della Venezia Tridentina, vol. I Trento, 1931.

104. *Di un particolare carattere paleontologico del Retico di Riva di Sotto (Lago d'Iseo)*. Atti R. Acc. Sc., vol. LXVII. Torino, 1932.
105. *Fauna cretacica di Aurisina (Trieste). Collezione del Museo di Bologna*. Giorn. di Geologia, serie 2.ª, vol. VII. — *Nota sulla presenza della Lucina Coquandiana d'Orb. nel calcare rossastro-oscuro a miliolidi eocenico di Aurisina (= Nabresina)*. Ibidem. Bologna, 1932.
106. *Qualche appunto per lo studio della fauna miocenica di Montemuro e Armento (Potenza)*. Boll. Soc. Geol. It., vol. LV. Roma, 1936.

g) Rudiste.

107. *Sopra alcune Rudiste senoniane dell'Appennino meridionale*. Mem. R. Acc. Sc., serie 2.ª, tomo L. Torino, 1900.
108. *Le Rudiste e le Camacee di S. Polo Matese raccolte da Francesco Bassani*. Mem. R. Acc. Sc., serie 2.ª, Tomo L. Torino, 1901.
109. *Una Rudista della Scaglia veneta*. Atti R. Acc. Sc., vol. XXXIX. Torino, 1904.
110. *Saggio per uno studio sulle Caprinidi dei calcari di scogliera (orizzonte del Col dei Schiosi) nelle Prealpi venete orientali*. Mem. R. Acc. dei Lincei, Cl. Sc. fis., serie 5.ª, vol. VII. Roma, 1907.
111. *Sopra alcune Rudiste del Cretaceo superiore del Cansiglio nelle Prealpi venete*. Mem. R. Acc. Sc., serie 2.ª, Tomo LIX. Torino, 1907.
112. *Notizie sulla fauna a Rudiste della pietra di Subiaco nella Valle dell'Aniene*. Boll. Soc. geol. it., vol. XXVII. Roma, 1908.
113. *Radiolites lituatus (Conr.) e Apricardia Nöttingi (Blanck.) nel Cretaceo superiore della Siria*. Atti R. Acc. Sc., vol. XLIV. Torino, 1909.
114. *Sulla presenza del Turoniano nel Monte Conero presso Ancona*. Boll. Soc. Geol. It., vol. XXX. Roma, 1911.
115. *Nuovi studi sulle Rudiste dell'Appennino (Radiolitidi)*. Mem. R. Acc. Sc., serie 2.ª, Tomo LXII. Torino, 1911.
116. *Le Rudiste del Senoniano di Ruda sulla costa meridionale dell'isola di Lissa*. Atti R. Acc. Sc., vol. XLVI. Torino, 1911.
117. *Per lo studio del Neocretacico nel Friuli occidentale*. Atti R. Acc. Sc., vol. XLVI. Torino, 1911.
118. *Rudiste della Scaglia veneta*. Atti R. Acc. Sc., vol. XLVII. Torino, 1912.
119. *Fossili neocretacei della Conca anticolana*. Boll. R. Comit. Geol., vol. XLIII. Roma, 1912.
120. *Cenni sulle faune sopracretaciche a Rudiste del M. Gargano*. Rend. R. Acc. Lincei, Cl. Sc. fis., serie 5.ª, vol. XXV. Roma, 1916.
121. *Notevole deformità dell'apparato cardinale di un Ippurite*. Atti R. Acc. Sc., vol. LII. Torino, 1917.

122. *Prospetto delle varie facies e loro successione nei calcari a Rudiste dell'Appennino.* Boll. Soc. Geol. It., vol. XXXVII. Roma, 1918.
123. *Fauna del Neocretacico della Tripolitania. Rudiste.* Mem. per servire alla descr. della Carta geologica d'Italia, vol. VIII. Roma, 1921.
124. *Osservazioni sopra alcune specie della fauna a Rudiste del Colle di Medea (Friuli).* Atti R. Acc. Sc., vol. LIX. Torino, 1924.
125. *Fauna a Rudiste ed una sua nuova forma di Villa Vallelonga in Abruzzo.* Atti R. Acc. Sc., vol. LXI. Torino, 1926.
126. *Ricerche sulle Rudiste e su altri fossili del Cretaceo superiore del Carso goriziano e dell'Istria.* Mem. dell'Ist. Geol. della R. Universita di Padova, vol. VII. Padova, 1926.
127. *Di alcune Rudiste della Tripolitania.* Boll. R. Uff. Geol., vol. LVIII. Roma, 1933.
128. *Di alcune Rudiste dello Zardeh Kuh in Persia.* Atti R. Acc. Sc., vol. LXX. Torino, 1935.

h) Pesci.

129. *Nuovi fossili del Miocene di Rosignano Piemonte.* Atti R. Acc. Sc., vol. LI. Torino, 1916.

i) Mammiferi.

130. *A proposito dei resti di un Elefante (El. primigenius Blum.) scoperto in un deposito quaternario della Collina di Torino.* Atti Congr. Nat. It. (Milano, settembre 1916), 1907.
131. *Fossili rari: Modello intracranico di Cyrtodelphis sulcatus.* Natura, vol. XIV. Milano, 1923.
132. *Resti di un « Physeter » scoperti nel Pliocene (astiano) di Vigliano di Asti, in frazione Val Montasca.* Atti R. Acc. Sc., vol. LXV. Torino, 1930.

l) Diatomee.

123. *Ricerche micropaleontologiche sulle argille del bacino lignitico di Leffe in Val Gandino* (in collab. con E. Bonardi). Atti Soc. It. di Sc. Nat., vol. XXVI. Milano, 1883.

m) Avanzi problematici.

134. *Somalica aenigmatica* (in collab. con R. Zuffardi-Comerci). Palaeontographia italica, vol. XXXII (n. s., vol. II). Pisa, 1932.
135. *Ancora sulla « Somalica aenigmatica »* (in collab. con R. Zuffardi-Comerci). Palaeontogr. it., vol. XXXII, suppl. 3. Siena, 1938.

n) Comunicazioni paleontologiche in lavori altrui.

136. *Comunicazioni paleontologiche.* (In: A. Verri ed E. Clerici, *Escursione a Tivoli, relazione sommaria*). Boll. Soc. Geol. It., vol. XXVI. Roma, 1907.
137. *Comunicazioni paleontologiche.* (In: S. Franchi, *Il Retico quale zona di transizione fra la Dolomia principale ed il Lias a facies piemontese* ecc.). Boll. R. Comit. Geol., vol. XLI. Roma, 1910.
138. *Comunicazioni paleontologiche.* [In: F. Bassani e G. D'Erasmo, *La ittiofauna dei calcari di Capo d' Orlando presso Castellammaae (Napoli)*]. Mem. Soc. It. dei XL, serie 3.ª, vol. XVII. Roma, 1912.
139. *Comunicazione paleontologica.* [In: C. Pilotti, *Calcari e calcescisti a Coscinocyathus in R. Corongiu de Mari e M. Ollastu (Iglesiente)*]. Boll. Soc. Geol. It., vol. XXX. Roma, 1912.
140. *Inoceramus Oosteri E. Favre negli scisti diasprini del M. Subasio.* [In: P. Principi, *Escursione ad Assisi ed al M. Subasio*]. Boll. Soc. geol. It., vol. XXXI. Roma, 1912.
141. *Comunicazioni paleontologiche.* [In: M. Taricco, *Contributo allo studio del Cambriano in Sardegna*]. Rend. R. Acc. Lincei, Cl. Sc. Fis., serie 5.ª, vol. XXI. Roma, 1912.
142. *Rhizocaulon Brongnarti Sap. negli strati lacustri rupeliani di Perfugas in Sardegna.* [In: C. Pilotti, *Relaz. prelim. sulla campagna geolog. del 1911. Sardegna*]. Boll. R. Comit. Geol., vol. XLIII. Roma, 1912.
143. *Comunicazioni paleontol.*. Res. Ass. min. Sarda, vol. I. Iglesias, 1913.
144. *Comunicaz. paleontol.* Res. Ass. min. Sarda, N. 5. Iglesias, 1914.
145. *Comunicaz. paleont.* [In: G. D'Erasmo, *La fauna e l'età dei calcari a ittioliti di Pietraroia*]. Palaeontogr. It., vol. XX e XXI. Pisa, 1914 e 1915.
146. *Sulla « Bradya tergestina Stache »*. Cfr. A. Silvestri, in Riv. It. di Paleont., vol. XXX. Pavia, 1924.
147. *Nuovi dati paleontologici.* [In: Lotti e Crema, *I terreni mesozoici dell' Appennino centrale*]. Boll. R. Comit. geol., vol. LII, N. 14. Roma, 1927.
148. *Notizie paleont.* [In: G. L. Nangeroni, *Nuovi affioramenti del Pliocene marino nella Valle d' Olona*]. Atti R. Acc. Sc., vol. LXIII. Torino, 1928
149. *Fossili dei calcari cretacici nelle isole del Dodecanneso.* [In: A. Desio, *Le isole italiane dell' Egeo*]. Mem. descritt. della Carta Geol. d'Italia, vol. XXIV (vedi pagg. 100, 151, 323, 333, 347, 364, 405). Roma, 1931.
150. *Notizie paleont.* [In: G. B. Floridia, *Osservaz. compiute durante un viaggio sulle Alpi Albanesi nel 1931*]. Boll. R. Soc. Geogr. It., serie 6.ª, vol. X. Roma, 1933.
151. *Fossili triassici* [In: E. Beneo, *La formazione mesozoica di Filettino e Collepardo (M. Simbruini ed Ernici)*]. Boll. R. Uff. Geol., vol. LXI, N. 2. Roma, 1936.
152. *Appendice paleont.* a: E. Beneo, *La formazione miocenica e la tetto-*

nica della Valle Roveto (Alta Valle del Liri). Boll. R. Uff. Geol., vol. LXI, N. 7. Roma, 1936.

Saggi bibliografici.

153. *Bibliografia geolog. del Piemonte* (in collab. con F. Sacco e F. Virgilio). Boll. Soc. Geol. It., vol. XII. Roma, 1894.
154. *Saggio bibliogr. sulle Rudiste con indici dei nomi di autore, di genere e di specie.* Boll. R. Comit. Geol., vol. XLVI. Roma, 1916.
155. *Materiali per la Bibliogr. geol.* ecc. *dell'Istria e regioni finitime* (in collab. con F. Sacco e R. Battaglia). Mem. descr. della carta geol. d'It., vol. XIX. Roma, 1924.

Discorsi e relazioni.

156. *Relazione della escursione geologica del 10 settembre 1890 in Val d'Erve.* Boll. Soc. Geol. It., vol. IX. Roma, 1890.
157. *Sullo studio dei movimenti dei ghiacciai. Relazione della Commissione nominata dalla sede centrale del C. A. I.* (Programma, questionario, istruzioni). Rivista Club. Alp. It., vol. XIV. Torino, 1895.
158. *Relazione della Comm. incaricata dell'esame dei lavori presentati al IV Concorso Molon.* Boll. Soc. Geol. It., vol. XVII. Roma, 1898.
159. *Discorso pronunciato alla XX adunanza estiva tenuta dalla Società Geologica Italiana in Brescia (8 settembre 1901).* Boll. Soc. Geol. It., vol. XX. Roma, 1901.
160 *Parole dette in rappresentanza del Rettore dell'Università alla riunione della Società Geologica Italiana in Torino.* Boll. Soc. Geol. It., vol. XXVI. Roma, 1907.
161. *Relazione della Commissione aggiudicatrice del Premio Molon. VII Concorso.* Boll. Soc. Geol. It., vol. XXVII. Roma, 1907.
162. *Relazione* sul concorso al posto di Professore straord. di litologia e geologia agraria presso il R. Ist. Sup Agrario Sperim. di Perugia. Boll. uff. Min. Agr., Ind. e Comm. Anno 9, vol. II, serie A, fasc. 25. Roma, 1910.
163. *Parole pronunziate presentando al Prof. T. Taramelli la targa offertagli dai colleghi della Società Geologica Italiana.* Boll. Soc. Geol. It., vol. XXX. Roma, 1911.
164. *Discorso pronunciato alla XXXIII Riunione estiva tenuta dalla Società Geologica Italiana in Aquila (7 settembre 1913).* Boll. Soc. Geol. It., vol. XXXII. Roma, 1913.
165. *Relazione sul Concorso al premio Reale per la Geol. e Mineral.* Rend. R. Acc. Lincei, Adunanze solenni, vol. III. Roma, 1919.
166. *L'opera scientifica del Prof. T. Taramelli ricordata da un vecchio allievo in occasione delle onoranze nel 33° anno d'insegnamento universitario.* Pavia, Tip. Succ. Fratelli Fusi, 1919.

167. *Parole del Rettore all'inaugurazione dell'anno accademico 1920-21.* Annuario R. Università di Torino, 1920-21.
168. *Parole dette dal Rettore della R. Università (di Torino) commemorandosi Galileo Ferraris nel 25° anniversario della sua morte.* Varese, Arti Grafiche Varesine, 1922.
169. *Parole del Rettore all'inaugurazione dell'anno accademico 1921-22.* Annuario R. Università di Torino, 1921-22.
170. *Parole dette in occasione delle onoranze al prof. O. Mattirolo.* Relazione del Comitato, pag. 35. Torino, 1929.

Articoli e scritti vari.

171. *Le variazioni periodiche dei ghiacciai e gli studi relativi.* Natura, vol. IV. Milano, 1913.
172. *Gli studi geologici e il C. A. I.* [In: Opera del Club Alpino Italiano nel primo suo cinquantennio]. Torino, Soc. ed. nazionale, 1913.
173. *Del contributo portato alla litogenesi dai piccoli organismi.* Natura, vol. VIII. Milano, 1917.
174. *Quante e quali forme di organismi possono coi loro resti costituire un deposito di spiaggia marina.* Natura, vol. XIV. Milano, 1923.
175. *A proposito del dono al R. Museo Geol. di Torino della Coll. Rovasenda e del busto di A. Sismonda.* Atti R. Acc. Sc., vol. LIX. Torino, 1924.
176. *Cenni critici* alla introd. geol. del lavoro del cap. F. Biazzi, *Sulla fisica del Lago Maggiore*, in: Fr. Vercelli, *Osservazioni sulla monografia del cap. F. Biazzi* ecc. Rivista marittima, Roma, ottobre 1923.
177. *Curiosità naturali.* Natura, vol. XXI. Milano, 1930.
178. Voci: *Cirenaica* (Geol. e Morfol.); *Cretacico* o *Creta* (Periodo); *Giurassico* (Periodo), *Mesozoica* (Era). nella Enciclopedia Italiana, volumi X, XI, XVII, XXII. Roma, 1931-34.
179. *Rievocazioni e visioni istriane.* Torino, V. Bona, 1936.
180. *Il clima sulle Alpi ha mutato in epoca storica?* (Recensione di una memoria, con questo titolo, del prof. U. Monterin). La Ricerca scient., s. 2.ª, anno VIII, vol. I, N. 3-4. Roma, 1937.
181. *Le pietre parlano!* Natura, vol. XXVIII, f. II. Milano, 1937.

Commemorazioni.

182. G. G. Gemmellaro . *Cenni necrologici.* Atti R. Acc. Sc., vol. XXXIX. Torino, 1904.
183. E. De Nicolis. *Cenni commemorativi.* Boll. Soc. Geol. It., vol. XXVII. Roma, 1909.
184. G. Spezia. Ann. R. Università di Torino, anno 1911-12.
185. G. Spezia. *Commemorazione.* Mem. R. Acc. Sc., serie 2.ª, Tomo LXIII. Torino, 1912.

186. E. Suess. *Cenni commemorativi.* Atti R. Acc. Sc., vol. XLIX. Torino, 1914.
187. D. Pantanelli. *Necrologio.* Boll. R. Comit. geol., vol. XLIV. Roma, 1914.
188. V. Fino. *Cenno necrologico.* Boll. Soc. Geol. It., vol. XXXIII. Roma, 1914.
189. Giuseppina Osimo. *Cenni necrologici.* Torino, O. P. E. S., 1915.
190. F. Bassani. *Cenno necrologico.* Atti R. Acc. Sc., vol. LI. Torino, 1916.
191. *A ricordo di* F. Bassani. Boll. R. Com. Geol., vol. XLVI. Roma, 1916.
192. *In memoria di* P. Zuffardi. Boll. Soc. Geol. It., vol. XXXV. Roma, 1916.
193. *Conte* L. Di Rovasenda. *Cenni necrologici.* Rivista del C. A. I., vol. XXXVI. Torino, 1917.
194. *Il Prof. Sen.* L. Camerano, *Presidente del C. A. I. dal 1911 al 1917. Necrologia.* Riv. del C. A. I., vol. XXXVII, N. 1 e 2. Torino, 1918.
195. *Prof.* L. Camerano. *Cenno necrologico.* Boll. del Comit. Glac. It., N. III. Roma, 1918.
196. G. Capellini. *Parole a ricordo.* Atti R. Acc. Sc., vol. LVII. Torino, 1922.
197. *Ai soci della Soc. Geol. Italiana morti in guerra.* Dedica del XLI vol. del Boll. e cenni necrologici. Roma, 1922 (ristampa corretta: Roma, 1924).
198. *Inaugurandosi il «ricordo al prof.* Icilio Guareschi *ed ai suoi allievi caduti in guerra».* (Parole del Rettore). Pubbl. per cura del Comit. esecut. Torino, Tip. Schioppo, 1922.
199. T. Taramelli. *Cenni commemorativi ed elenco delle pubblicazioni* (con ritratto). Boll. R. Comit. geol., vol. XLVIII, N. 8. Roma, 1922.
200. A. Issel *commemorato.* Atti R. Acc. Sc., vol. LVIII. Torino, 1923.
201. *In memoria del socio nazionale* T. Taramelli. Rend. R. Acc. Lincei, Cl. Sc. fis., serie 5.ª, vol. XXXII. Roma, 1923.
202. E. Mattirolo *commemorato.* Ann. R. Acc. di Agricoltura di Torino, vol. LXVII e Boll. R. Uff. Geol., vol. L. Roma, 1924.
203. *Un maestro dell'Ateneo Lombardo* [T. Taramelli]. Universitatis Ticinensis Saecularia Undecima die XXI. Mai. Mensis Anno MCMXXV. Pavia, 1925.
204. *Breve commemorazione del socio corr.* V. G. Kilian, *dell'Università di Grenoble.* Atti R. Acc. Sc., vol. LXI. Torino, 1925.
205. *Commemorazione di* Archibald Geikie. Rend. R. Acc. Lincei, Cl. Sc. fis., serie 6.ª, vol. III. Roma, 1926.
206. O. Marinelli (*Cenni necrolog.*). Boll. del Com. Glac. It., N. 7. Roma, 1927.
207. *Breve commemor. del socio naz. resid. S. A. R. Emanuele Filiberto di Savoia, Duca d'Aosta,* [Adunanza Cl. Sc. fis. 15 nov. 1931]. Atti R. Acc. Sc., vol. LXVII. Torino, 1931.
208. E. Repossi, *mineralogo e geologo. Commemorazione.* Ann. R. Acc. di Agricoltura, vol. LXXV. Torino, 1932.
209. E. Repossi. *Necrologia.* Boll. Comit. Glac. It., N. 12. Torino, 1932.
210. *Parole in memoria di* P. Boselli. [Adunanza a Classi unite del 13 marzo 1932]. Atti R. Acc. Sc., vol. LXVII. Torino, 1932.
211. *Parole in memoria del socio naz. non resid.* F. Zambonini, [Adunanza

della Classe di Scienze fisiche 17 gennaio 1932]. Atti R. Acc. Sc., vol. LXVII. Torino, 1932.

212. *Parole in memoria del socio naz. resid.* G. Peano. [Adunanza della Classe di Scienze fisiche 24 aprile 1932]. Atti R. Acc. Sc., vol. LXVII. Torino, 1932.

213. *Parole in memoria del socio corr.* S. Franchi. [Adunanza della Cl. di Sc. fis. 22 maggio 1932]. Atti R. Acc. Sc., vol. LXVII. Torino, 1932.

214. T. Taramelli rammentato dal socio Parona. Atti R. Accad. Sc., vol. LXIX. Torino, 1934.

215. L. De Marchi. *Cenni necrologici.* Boll. R. Com. Glac., N. 16. Torino, 1936.

216. Henri Douvillé, *cenno commemorativo.* Atti R. Acc. Sc., vol. LXXII. Torino, 1937.

Traduzioni.

217. *Sopra il carattere di antichità della fauna di mare profondo di* M. Neumayer (traduzione). Boll. Scient., N. 4. Pavia, 1882.

Trattati e opere divulgative.

218. *Il terreno. Nozioni di Geologia dinamica, storica e agraria.* Nuova Enciclopedia di Agraria, Parte III. Torino, U. T. E. T., 1898. (Ristampato nel 1920).

219. *Trattato di Geologia con speciale riguardo alla geologia d'Italia.* Milano, Fr. Vallardi, 1901-1903.

220. *Geologia.* (In: Libro d'oro del sapere), vol. I. Milano, Fr. Vallardi, 1911.

221. *Trattato di Geologia con speciale riguardo alla geologia d'Italia.* Collaboratori per la geologia storica i professori: G. Dal Piaz e R. Fabiani (Padova), M. Gortani (Pavia). Seconda Ediz. Milano, Fr. Vallardi, 1924.

222. *Il Piemonte e i suoi paesaggi. Impressioni e riflessioni geologiche* (con una cartina dei Massicci delle Alpi Occidentali e 72 figure). Torino: G, B. Paravia e C., 1935.

Sulle proprietà ottiche dei metalli.

Nota del socio ordinario **Antonio Carrelli**

(Adunanza del dì 7 giugno 1939 - XVII)

Sunto. — In questa nota viene calcolato il potere riflettente dei metalli in funzione della lunghezza d'onda, in base alla moderna teoria elettronica e si mostra che non è in accordo coi dati sperimentali conosciuti. In base a ricerche sperimentali fatte dall' A. e da allievi si dà la probabile interpretazione della diversità riscontrata.

§ 1. — In lavori precedentemente pubblicati [1]) sono state messe in evidenza alcune particolarità sulla emissione termica dei metalli allo stato solido, particolarità che riguardano evidentemente proprietà ottiche di essi. In questa Nota passiamo all'interpretazione dei risultati ottenuti, considerati secondo le teorie moderne sui metalli.

In primo luogo è da ricordare che il campo nel quale nelle Note precedenti è stata studiata l'emissione, in base ai valori estremi dell'intervallo termico esplorato, è limitato alla zona spettrale compresa fra 0.8 μ. (e cioè il limite dello spettro visibile) e l'ultrarosso fino a circa 7μ; è evidente allora che bisogna specialmente riferirsi a quella parte della teoria dei metalli che più particolarmente serve per interpretare le proprietà ottiche presentate in questo campo di frequenza, e cioè, in altre parole, almeno per il momento, trascurare completamente il contributo dato dalle bande di assorbimento dei metalli.

Ora la moderna teoria elettronica considera gli elettroni più esterni degli atomi nei metalli come elettroni in certo modo liberi [2]); il comportamento di questi elettroni sotto l'azione di forze non è perfettamente quello di elettroni liberi, ma l'accelerazione effettiva a' che questi assumono è uguale a quella a che acquisterebbe un elettrone libero sotto l'azione della stessa forza moltiplicata per un numero f che è di poco diverso, ma

---

[1]) Carrelli A., *Potere emissivo totale e parziale di alcune sostanze.* Atti Acc. Naz. Lincei v. XXIX p. 241, 1939. — Carrelli A., *Idem.* Atti Acc. Naz. Lincei v. XXIX p. 381, 1939. — Carrelli A., *Potere emissivo parziale di alcune sostanze. Legge di* Wien *generalizzata.* Atti Acc. Naz. Lincei. In pubblicazione. — Cennamo F., *Ricerche sull' emissione termica totale del Ni.* Nuovo Cimento 16, 147, 1939. — Cennamo F., « *Sull' emissione spettrale del Ni* ». 16, 1939.

[2]) Per la parte teorica riguardante questi problemi cfr. Hand. der Phys. Bd. XXI.

diverso dall'unità,

$$a' = af.$$

Il contributo che questi elettroni in certo modo liberi portano all'indice di rifrazione n, ed al coefficiente d'assorbimento k del metallo, ponendo

$$n_F = \frac{\Delta}{M} N f \quad (1); \qquad \left(\frac{e^2 n_F}{\pi m}\right)^{\frac{1}{2}} = \nu_1 = \frac{c}{\lambda_1} \quad (2); \qquad \frac{e^2 n_F}{2\pi m} \rho = \nu_0 = \frac{c}{\lambda_0} \quad (3);$$

dove e, m sono le costanti elettroniche, Δ è densità, M è massa atomica, N è numero di Avogadro, e ρ è la resistenza specifica del metallo, è dato dalle formule seguenti:

$$n^2 - k^2 = 1 - \frac{\nu_1^2}{\nu_0^2 + \nu^2} \quad (4) \qquad n k = \frac{1}{2} \frac{\nu_1^2}{\nu_0^2 + \nu^2} \frac{\nu_0}{\nu}, \quad (5)$$

dove ν è la frequenza della radiazione incidente.

Come vedesi compare, nelle formule scritte, la resistenza ρ, e cioè il metallo è caratterizzato, per individuarne il comportamento sotto l'azione delle onde elettromagnetiche, solo dal parametro che lo individua in riguardo all'effetto dei campi elettrici costanti o variabili se mai con piccola frequenza.

La zona spettrale nella quale questa ipotesi di elettroni liberi è verificata con successo è l'ultrarosso estremo, in un campo di frequenze per il quale $\nu \ll \nu_0$ (e quindi anche $\nu < \nu_1$, perchè $\nu_0 \ll \nu_1$).

In questo campo spettrale il potere riflettente R è dato da

$$R = 1 - \left(\frac{4 c \rho}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (6)$$

e questa è la relazione di Hagens e Rubens che per l'estremo ultrarosso può considerarsi in buon accordo con l'esperienza.

Se vogliamo calcolare R per tutto il campo di frequenza, o più particolarmente per quel campo compreso fra λ_0 e λ_1, ponendo

$$n^2 - k^2 = -|A| \quad , \quad nk = B,$$

si ricava dalla (4)

$$n^2 = -|A| + k^2,$$

e sostituendo nella (5)

$$k^4 - k^2 |A| - B^2 = 0,$$

da cui

$$k^2 = \frac{|A| \pm \sqrt{A^2 + 4B^2}}{2}.$$

Dal valore di k^2 si può ottenere quello di n^2 ricordando la (1). La duplicità del segno del radicale può facilmente eliminarsi: in effetti per $\nu_1 > \nu_0^2 + \nu^2$, $n^2 - k^2$ è negativo, ed allora per $\nu_1 > \nu_0^2 + \nu^2$

$$n^2 = -\frac{|A|}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + 4B^2} \quad , \quad k^2 = \frac{|A|}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + 4B^2};$$

per $\nu_1 < \nu_0^2 + \nu^2$ invece c'è lo scambio di segno.

Con questi valori di n^2 e k^2 si ottiene infine la seguente espressione per R:

$$R = \frac{1 + \sqrt{A^2 + 4B^2} - 2\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{A^2 + 4B^2} - \frac{A}{2}}}{1 + \sqrt{A^2 + 4B^2} + 2\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{A^2 + 4B^2} - \frac{A}{2}}} \qquad (7)$$

Come vedesi questa espressione è piuttosto complessa. Per ottenere dunque l'andamento di R in funzione di λ bisogna procedere a calcoli numerici.

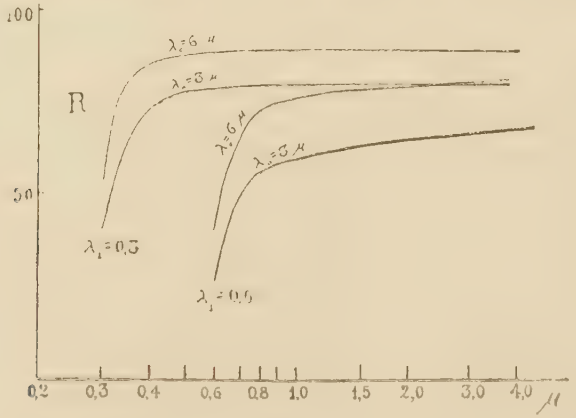


Fig. 1.

Le quantità che determinano l'andamento di R sono λ_1 e λ_0, ed i valori scelti per i calcoli da noi fatti variano intorno a valori già riscontrati per i metalli. Precisamente abbiamo scelto per λ_1 e λ_0 le seguenti coppie di valori $\lambda_1 = 0{,}3\,\mu$, $\lambda_0 = 3{,}0\,\mu$; $\lambda_1 = 0{,}3\,\mu$, $\lambda_0 = 6{,}0\,\mu$; $\lambda_1 = 0{,}6$, $\lambda_0 = 3{,}0\,\mu$; $\lambda_1 = 0{,}6\,\mu$, $\lambda_0 = 6{,}0\,\mu$.

I risultati sono riportati in fig. 1 dove come ascisse si hanno $\log\lambda$ e come ordinate R. L'andamento teorico del potere riflettente è dunque il seguente: per un grande intervallo di lunghezza d'onda, per il quale $\lambda \sim \lambda_0$, il potere riflettente è molto elevato, e diminuisce lentamente al diminuire

di λ; nell'intorno di λ_1, che nei casi per i quali noi abbiamo fatti i calcoli assume i valori di 0.3 μ a 0.6 μ, il potere riflettente decresce rapidamente.

Passando da un certo valore di λ_0 ad un altro più grande, restando costante λ_1, il che significa, in base alla (3) passando da un valore della resistenza specifica ρ ad un altro più piccolo, il potere riflettente per gli stessi λ ha valori più grandi, e si conserva di valore più alto per un maggiore intervallo di lunghezza d'onda, per diminuire nell'intorno di λ_1, più rapidamente.

Passando da un certo valore di λ_1 ad un altro più grande (mantenendo costante λ_0) le variazioni che si riscontrano per il potere riflettente sono opposte a quelle ottenute precedentemente.

D'altra parte per valori molto grandi di λ, per i quali è valida la relazione di Hagens e Rubens un aumento di λ_0 rispetto a λ_1, e ciò in aumento del rapporto $\frac{\lambda_0}{\lambda_1}$ in base alle (3) e (6) rappresenta una diminuzione di ρ, se λ_1 è costante, e quindi porta ancora ad un aumento del potere riflettente. Ciò significa che l'effetto su R prodotto da un aumento di λ_0, e cioè, di una diminuzione ρ se λ_1 è costante, è lo stesso per tutti i valori di λ.

2. Veniamo ora al confronto con i dati sperimentali. Per determinare il valore di λ_1 dato dalla (2) bisogna conoscere $n_F = nf$; ora n_F è dato dalla relazione (1), e cioè è il prodotto dell'inverso del volume atomico $\frac{\Delta}{M}$ per il numero N di Avogadro, e per il numero f.

L'ordine di grandezza di $\frac{\Delta}{M} N$ è di circa 10^{22}, 10^{23}; esso è massimo per i metalli che hanno piccolo volume atomico e minimo per gli altri, e cioè per i metalli alcalini. Il valore di λ_1 oltre che dipendere da n, dipende ancora da f, che si aggira intorno all'unità, essendo sempre inferiore tranne alcuni casi speciali nei quali f è nettamente inferiore.

Tenuto conto della curva dei volumi atomici, e riferendosi ai volumi massimi e minimi (Cs, Co) il rapporto tra i valori estremi di questi volumi per i vari metalli è circa 10, quindi il rapporto fra i valori estremi di n tenuto conto della (2) è circa 3; da questi valori per n, e ricordando che nei casi noti f da metallo a metallo ha variazioni che in massima non sono molto grandi ($f \sim 1$) si giunge alla conclusione che λ_1 deve trovarsi sempre nella prima zona dell'ultravioletto, e così per $n = 6 \cdot 10^{23}$ e $f = 0{,}8$ $\lambda_1 = 1500$ $\mathring{A}$, per $n = 8 \cdot 10^{22}$ $f = 0.1$, $\lambda_1 = 3670$ $\mathring{A}$.

Molto più grandi sono le variazioni di λ_0 da metallo a metallo in dipendenza dei vari valori della resistenza ρ.

Nel caso dell'Ag dai dati sperimentali, si ricava che $\lambda_1 = 0{,}15\,\mu$, e $\lambda_0 = 90\,\mu$, e quindi il rapporto $\frac{\lambda_1}{\lambda_0}$ vale $\frac{0{,}15}{90} = 1{,}6 \cdot 10^{-3}$; per il Bi si ottiene un rapporto $\frac{\lambda_1}{\lambda_0}$ dato da $6{,}1 \cdot 10^{-2}$, se si pone f uguale all'unità, il che è non corrispondente alla realtà perchè f è certamente inferiore; con f minore dell'unità $\frac{\lambda_1}{\lambda_0}$ di-

minuisce, quindi anche per il *Bi* il valore di $\frac{\lambda_1}{\lambda_0}$ è certamente inferiore a 10^{-1}, ed il *Bi* rappresenta con l'alto valore di ρ un caso limite, infatti per gli altri metalli, tenuto conto che la resistività non raggiunge valori così alti come per il *Bi*, ponendo $f = 1$ si ricava che il rapporto $\frac{\lambda_1}{\lambda_0}$ vale all'incirca 10^{-2} come ordine di grandezza, e con i valori effettivi di f che sono minori dell'unità il valore del rapporto è ancora inferiore, come è stato riscontrato sperimentalmente nel caso dell'Ag.

Le curve ricavate dalla formula (7) e riportate in fig. 1 rappresentano dunque curve ottenute con i valori di $\frac{\lambda_1}{\lambda_0}$ uguali a $5 \cdot 10^{-2}$, 10^{-1}, $2 \cdot 10^{-1}$ che evidentemente per quello che si è detto rappresentano valori troppo alti rispetto ai valori che possono attribuirsi ai vari metalli; anche il valore di $\lambda_1 = 0{,}6\mu$ che si è scelto per una coppia di curve è più grande di quelli che presumibilmente possono accettarsi (eccezion fatta per il *Bi*, per il quale però mancano misure di potere riflettente in un esteso campo spettrale).

Nella fig. 2 si riportano le curve sperimentali per tre metalli *Ta*, *W* e *Cr*: come si vede l'andamento di queste curve permette di affermare 1.°) che *R* ha valori piuttosto bassi, rispetto a quelli che si ricavano dalla (7), 2°) che lo

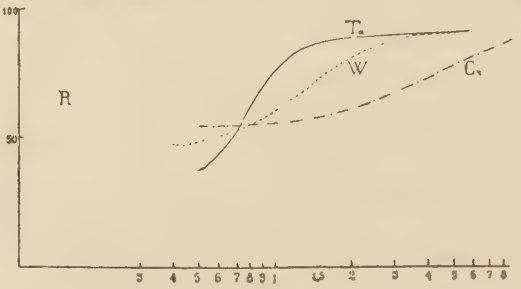


Fig. 2.

aumento di *R* all'aumentare di λ è più piccolo di quello che potrebbe aversi basandosi sulle (7) con valori di $\frac{\lambda_1}{\lambda_0}$ come quelli riportati in fig. 1. Per ottenere dunque andamenti di *R* in funzione di λ come quelli sperimentali bisognerebbe ammettere per il rapporto $\frac{\lambda_1}{\lambda_0}$ un valore ancora più grande di quelli riportati, il che come si è visto precedentemente non è in accordo con tutte le proprietà dei metalli.

La teoria suesposta si basa sull'ipotesi che in un metallo la *resistività* ρ, definita e misurata per campi costanti o variabili con frequenza non molto elevata possa completamente individuare il comportamento ottico degli elettroni liberi nei metalli; ora sembra dal confronto dei dati sperimentali con quelli ricavati dalla teoria che questa teoria basata sull'ipotesi riportata non può considerarsi in buon accordo con l'esperienza.

Però prima di giungere in modo definitivo a questa conclusione rimane ancora da stabilire l'influenza che può avere su R la presenza nel metallo di bande di assorbimento che dipendono da un meccanismo di assorbimento delle radiazioni diverso da quello invocato per ricavare la relazione (7), e cioè dipendono dall'assorbimento di frequenze caratteristiche.

Per fare queste indagini conviene riferirsi all'Ag che è stato studiato in modo esauriente.

Questo metallo ha infatti una banda d'assorbimento abbastanza nettamente individuata e facilmente raggiungibile. Dai dati sperimentali si ricava che il coefficiente d'assorbimento k si comporta come in tutti gli altri casi noti di assorbimento, e cioè presenta un massimo accentuato per una determinata zona di frequenza; inoltre anche l'indice di rifrazione nella zona del massimo assorbimento ha un andamento anomalo che è dello stesso tipo di quello che si ha genericamente per le bande di assorbimento di tutti gli altri corpi: si conclude quindi che nelle zone nelle quali il metallo ha massimi di assorbimento, dato che v'è la classica anomalia per l'indice di rifrazione, e del coefficiente d'assorbimento, per il potere riflettente deve riscontrarsi l'andamento che si riscontra in tali casi, e cioè R deve presentare un massimo, come si ha per tutte le altre sostanze nelle zone di assorbimento.

I valori ritrovati sperimentalmente per R relativamente ai metalli nella zona del primo ultrarosso sono più bassi di quelli ottenuti con la relazione (7), questa diversità non può attribuirsi dunque alla presenza di massimi d'assorbimento, che porterebbero ad un aumento di R.

Da queste considerazioni si ricava che per tutti i metalli si dovrebbe avere: 1°) un andamento di R secondo le curve riportate in fig. 1 con valori di $\frac{\lambda_1}{\lambda_0}$ non molto elevati per restare in accordo con i risultati ottenuti sui metalli in altri campi, e cioè si prevede un potere riflettente più grande di quello sperimentale; 2°) inoltre, dal confronto delle curve della fig. 1 con quella della fig. 2, si prevedono variazioni più rapide di R per λ decrescenti nell'intorno di λ_1. La presenza di bande di assorbimento nel metallo porta a valori più alti del potere riflettente, e quindi non può essere invocata per ristabilire un accordo.

Si può però sanare questo disaccordo ritenendo che ρ sia una funzione crescente al diminuire di λ, ciò significa in altre parole ritenere che il moto di questi elettroni all'aumentare della frequenza dei campi agenti, non porti ad un valore della resistività, indipendente dalla frequenza, uguale a quella caratteristica per i campi costanti. La teoria elettronica finora sviluppata anche tenuto conto dei concetti quantistici ha sempre considerato i campi agenti nell'elettrone come costanti, e quindi non è stato ancora considerata questa possibilità.

In ricerche precedenti da noi compiute sul potere emissivo dei metalli è risultato che il potere riflettente varia col variare della temperatura, e

precisamente si è potuto stabilire che $\frac{\partial \log (1-R_\lambda T)}{\partial \log \lambda}$ diminuisce al crescere della temperatura. Ora l'aumento di T porta un aumento della resistenza ρ: e l'aumento di ρ si traduce in una diminuzione di λ_0. Dalla fig. 1 risulta che se λ_0 diminuisce varia l'andamento di R in funzione di λ, e questa variazione almeno qualitativamente coincide con i risultati sperimentali da noi ottenuti.

Non si può fissare in modo sicuro l'andamento di R perchè, come si è già accennato, la teoria degli elettroni liberi non tien conto di un fatto sperimentale, e cioè dell'effettivo comportamento degli elettroni liberi.

Ricerche sul potere emissivo dei metalli per varie lunghezze d'onda ed a varie temperature sono state compiute relativamente al *Wa* [1]. Nella fig. 3 si riportano i risultati ottenuti.

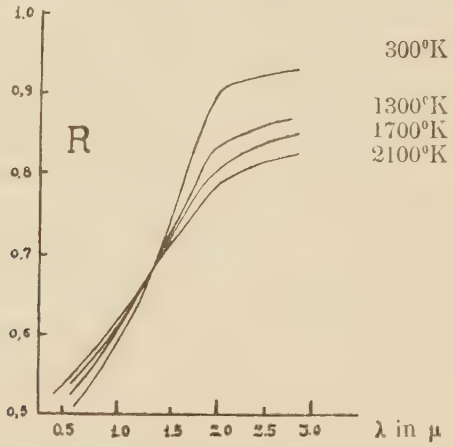


Fig. 3.

Da questi dati si può ricavare evidentemente l'andamento del potere riflettente per le varie temperature. Anche in questo caso si vede chiaramente che l'azione termica non è quella prevista dalla teoria. Infatti l'aumento di temperatura porta una variazione di λ_0, e precisamente ad una diminuzione, quindi in base alla (7) i valori di R relativi alla temperatura debbono essere tutti superiori a quelli relativi a temperatura più alta. Si potrebbe però in certo modo spiegare l'andamento riscontrato ammettendo che la parte inferiore della curva di R dipenda dalle bande di assorbimento che evidentemente possono presentare una variabilità termica, e precisamente nel senso di uno spostamento del limite di frequenza inferiore.

Rimane sempre la difficoltà prima enunciata sul valore effettivo di R e sul suo andamento che non è in accordo coi dati sperimentali.

---

[1]) Weniger e Pfund, *Phys. Rev.*, 14, 1919 p. 427.

VARIAZIONI DEL POTERE ASSORBENTE DEL NI. CON LA TEMPERATURA.

Nota III del dott. **F. Cennamo,** *presentata dal socio* **A. Carrelli**

(Adunanza del dì 7 giugno 1939 - XVII)

Sunto. — In questa Nota si determina sperimentalmente l'andamento del potere assorbente del Nichel nell'intervallo termico 700-1200°K per $\lambda = 1{,}5$; 2,5 ; 4,5 μ. Si stabiliscono così delle deviazioni dell'andamento del potere assorbente rispetto alle previsioni teoriche.

Questi risultati ottenuti in modo diretto sono in accordo con quelli ottenuti dallo stesso sperimentatore per altra via e pubblicati in precedenti lavori.

In una nota precedente [1]) sull'emissione spettrale del Nichel abbiamo

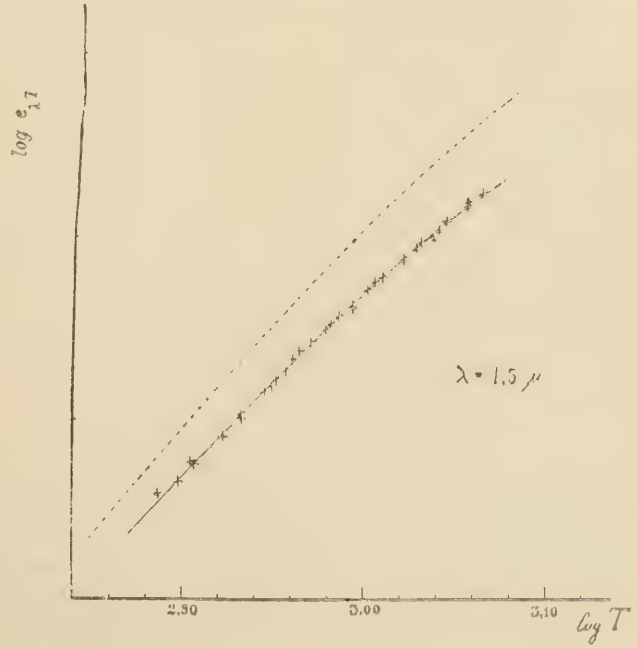


Fig. 1.

trovato che, per l'intervallo termico compreso tra 600° e 1100°K, il prodotto $\lambda_m T$ varia da 0,244 a 0,278.

[1]) CENNAMO F., « *Sull'emissione spettrale del Nichel* ». Nuovo Cimento. Maggio 1939.

Da queste deviazioni dalla legge di Wien che ammontano all'incirca al 12 %, si ricava, in base ad un lavoro di A. Carrelli [1]) che il potere assorbente $a_{\lambda T}$ (e quindi il potere riflettente $R_{\lambda T} = 1 - a_{\lambda T}$) del Nichel non è indipendente dalla temperatura e nel lavoro citato [2]) si prevedeva l'andamento probabile di $R_{\lambda T}$ per le due temperature distinte di 800°K e 1000°K.

Nel presente lavoro noi abbiamo voluto determinare se queste deduzioni trovassero o meno conferma sperimentale diretta, ed abbiamo perciò deter-

Fig. 2.

minato alcune isocromate del Nichel nell'intervallo termico 600°K — 1200°K per λ comprese da 1,5 μ a 5,5 μ.

È da rilevare che Löwe [3]) ha studiato, mediante raggi restanti, le isocromate del Nichel al variare della temperatura nell'intorno del punto di Curie per $\lambda = 6{,}7\,\mu$; $8{,}7\,\mu$ e $24\,\mu$ e cioè per le grandi lunghezze d'onda; per lo studio dell'emissione delle lunghezze d'onda più piccole egli frappone tra la

---

[1]) Carrelli A., « *Sull' emissione spettrale di alcune sostanze e sulla legge di* Wien *generalizzata* ». « Rendiconti R. Acc. dei Lincei » 29, 1939.

[2]) Cennamo F., loc. cit.

[3]) Löwe E., « *Ueber das Emissionsvermögen des Nickels* ». Ann., der Phys. — vol. 25, p. 213, 1936.

lamina di Nichel edil radiometro una lamina di quarzo che è completamente opaco per le lunghezze d'onda $> 4\,5\,\mu$ ed ha determinato l'andamento dell'emissione per le radiazioni filtrate da questa laminetta, e cioè globalmente per tutte le radiazioni con $\lambda < 4{,}5\,\mu$

Il dispositivo sperimentale da noi usato è lo stesso di quello descritto nei lavori precedenti [1]; le isocromate sono state ricavate sia dalle isoterme ottenute nel lavoro precedente nel quale si è proceduto ad una verifica della legge di Wien, sia facendo cadere sulla fenditura della termopila dello spettrografo le radiazioni relative alla lunghezza d'onda in esame; raggiunta la posizione del prisma che permetteva l'analisi relativamente ad una spe-

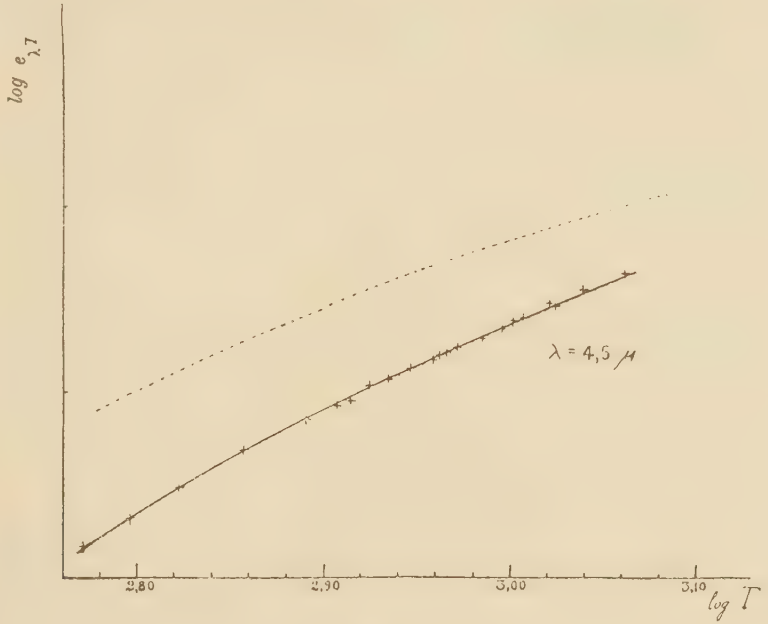


Fig. 3.

ciale λ si faceva variare la temperatura della laminetta di Nichel e ad ogni temperatura si leggeva al galvanometro la corrispondente deviazione prodotta dalla corrente della termopila, corrente che veniva amplificata con un termorelais tipo Moll.

Nelle figg. 1, 2 e 3 si riportano le isocromate del Nichel per $\lambda = 1{,}5\,\mu$; $2{,}5\,\mu$; $4{,}5\,\mu$ rispettivamente.

Nelle predette figure sono riportate sulle ascisse i log T in °K e sulle ordinate, in iscala arbitraria, i log $e_{\lambda T}$.

---

[1]) Cennamo F., *loc. citata* e Nuovo Cimento. « Ricerche sull'emissione Termica Totale del Ni ». Nuovo Cimento v. 16, p. 147, 1939.

Le curve tratteggiate danno l'andamento delle corrispondenti isocromate del corpo nero [1]).

Da queste curve si può ricavare, a meno di una costante arbitraria, dato che non si sono fatte determinazioni assolute, il valore del potere assorbente $a_{\lambda T}$ del Nichel in funzione della temperatura per le lunghezze d'onda studiate.

Dette isocromate sono limitate inferiormente per temperature tutte superiori al punto di Curie; con queste determinazioni non si è dunque in grado di stabilire se ci sia per tali lunghezze d'onda discontinuità per effetto della trasformazione magnetica.

È importante rilevare dalle curve riportate che l'isocromata corrispondente alla lunghezza d'onda $\lambda = 2{,}5\,\mu$ all'incirca ha lo stesso andamento di quella del corpo nero.

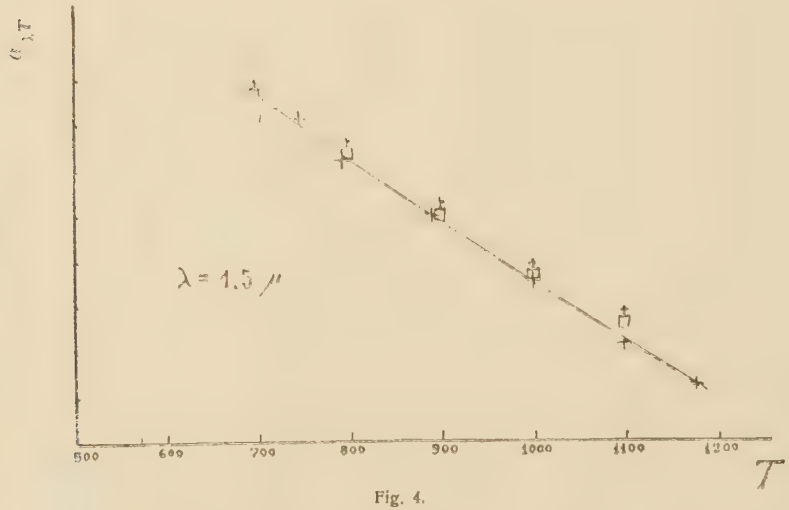


Fig. 4.

Di qui deriva, vedi figura 5, che il potere assorbente per quella lunghezza d'onda può, almeno in prima approssimazione, considerarsi indipendente dalla temperatura.

Per lunghezze d'onda minori di $\lambda = 2{,}5\,\mu$ le isocromate presentano deviazioni in un senso e per lunghezze d'onda superiori deviazioni in senso opposto dall'andamento dell'isocromate corrispondente del corpo nero. E precisamente per $\lambda = 1{,}5\,\mu$ (v. fig. 4) si ha che il potere assorbente diminuisce con l'aumentare della temperatura, mentre per $\lambda = 4{,}5\,\mu$ il potere assorbente (v. fig. 6) aumenta con la temperatura.

Questi risultati sono qualitativamente in accordo con quelli ai quali

[1]) Dalle « *International Critical Tables* », vol. 5.

si è giunti nel lavoro precedentemente citato, nel quale si riscontrano delle variazioni della legge di WIEN, variazioni che portano appunto a ritenere che $\frac{\partial \log \lambda_{\lambda T}}{\partial \log \lambda} \neq 0$ sia funzione della temperatura e nel senso da noi ora trovato.

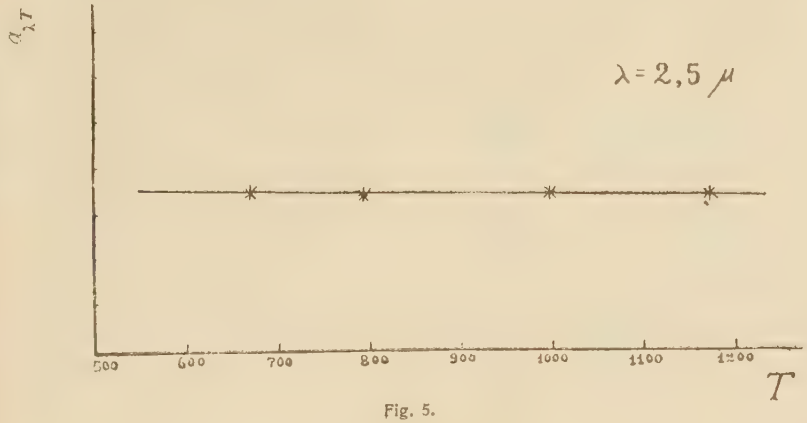


Fig. 5.

Poichè, come abbiamo precedentemente visto, il potere riflettente, e quindi il potere assorbente, per $\lambda = 2{,}5\mu$ è all'incirca indipendente dalla tem-

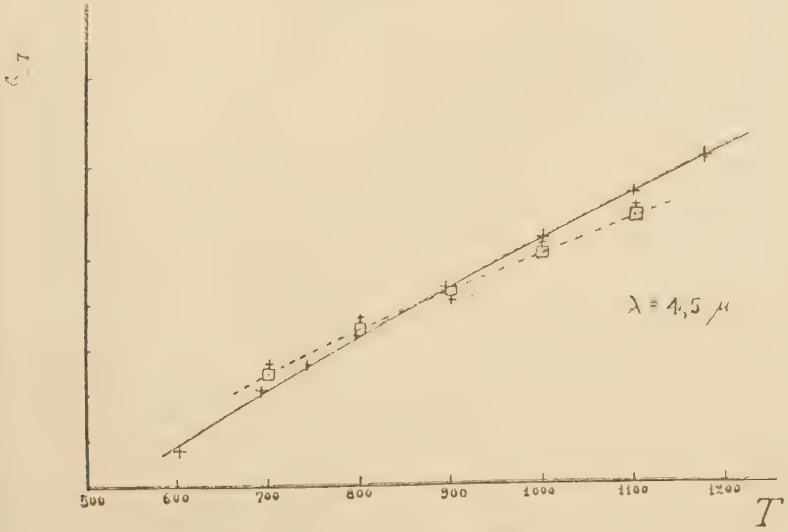


Fig. 6.

peratura, in un sistema di assi cartesiani sulle cui ascisse siano riportati i $\log\lambda$, e sulle cui ordinate i $\log a_{\lambda T}$, un fascio di rette passanti tutte per lo

stesso punto, e cioè per $\log \lambda = \log 2{,}5\,\mu$ e le cui inclinazioni corrispondenti siano date dai valori $\frac{\partial \log a_{\lambda T}}{\partial \log \lambda}$ per le varie temperature e ricavabili dalle

TABELLA I

T in °K	$\lambda_m T$	$\frac{xe^x}{e^x - 1}$	$\frac{\partial \log a_{\lambda T}}{\partial \log \lambda}$	$\frac{\partial \log a_{\lambda T}}{\partial \log \lambda}$
700	0,2518	5,77		— 0,77
800	0,2595	5,61		— 0,61
900	0,2658	5,47		— 0,47
1000	0,2720	5,35		— 0,35
1100	0,2790	5,22		— 0,22

variazioni della legge di WIEN, rappresentano evidentemente le isoterme del potere assorbente del Nichel, (v. fig. 7); queste inclinazioni sono riportate nella tabella I, i cui valori sono ricavati dai lavori precedentemente citati.

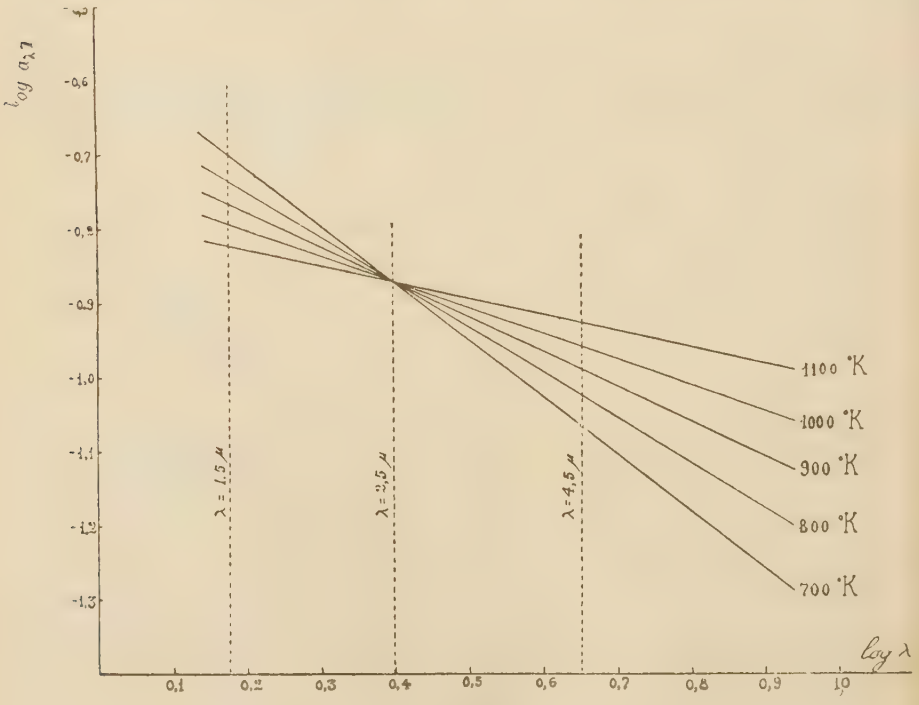


Fig. 7.

Dalla figura 7) si possono facilmente ricavare le isocromate.

Nelle figure 4) e 6) sono segnati con crocette i valori ottenuti diretta-

mente e con l'altro segno i valori ricavati con questo metodo. Come si vede l'accordo fra l'andamento del potere assorbente del *Ni* così ricavato con l'andamento ottenuto in modo diretto può senz'altro ritenersi soddisfacente.

La moderna teoria elettronica dei metalli prevede, almeno qualitativamente, una diminuzione di $\frac{\partial \log a_{\lambda T}}{\partial \log \lambda}$ al variare di T [1]) ma non è in grado di spiegare tutte le particolarità riscontrate.

È da notare infine l'andamento ritrovato da noi per il Nichel è analogo a quello riscontrato da Weniger e Pfund [2]) nel tungsteno per il quale $R_{\lambda T}$ cresce col crescere della temperatura per piccole lunghezze di onda; è all'incirca stazionario per $\lambda = 1{,}3\,\mu$ e per lunghezze d'onda più grandi diminuisce colla temperatura.

Napoli, Istituto di Fisica della R. Università.

[1]) Carrelli A., *Sulle proprietà ottiche dei metalli.* Rend. Acc. Sc. fis. e mat. Napoli, 1939.

[2]) Weniger e Pfund, *Phys. Rev.*, 14, 1919, p. 427.

La misura delle correnti disperse [1]).

Nota del socio corrispondente **B. Focaccia** *e* **M. M. Jacopetti**

(Adunanza del dì 7 giugno 1939 - XVII).

Sunto. — Si espone la teoria di un metodo di misura della corrente dispersa da una membratura metallica, con particolare riferimento alle reti di strutture sotterranee e alle reti di binari. Si forniscono le notizie per l'applicazione pratica del metodo e si accenna ai primi risultati ottenuti.

Lo studio dei fenomeni di corrosione per correnti vaganti conduce alla esecuzione di misure sulle membrature metalliche sede del danno, e sulla rete di rotaie generatrice delle correnti disperse. Queste misure tendono a stabilire le condizioni elettriche delle due reti di membrature, e sopratutto a valutare, direttamente o indirettamente, la entità dello scambio di correnti, che è la causa del fenomeno di corrosione.

Tuttavia le misure che normalmente si eseguono non conducono alla conoscenza della corrente assorbita o dispersa da una certa lunghezza della struttura in esame. Ciò vale per le reti di strutture sotterranee, e più ancora per le reti di binari. Per il primo tipo di strutture infatti si eseguono oggi delle misure contemporanee in due punti diversi e si riesce, dal paragone dei diagrammi rilevati, a misurare la corrente dispersa. Per le reti di rotaie invece, i controlli che abitualmente si eseguono, (della resistenza dei giunti delle rotaie, delle cadute di potenziale longitudinali, ecc.) possono, è vero, fornire un'idea della condizione della rete di rotaie, dal punto di vista della dispersione, ma poichè questa dipende anche da altri elementi, di cui alcuni eminentemente variabili, (tipo di posa, natura del terreno e condizione di questo, tipo e posizione delle altre canalizzazioni sotterranee, ecc.) tale idea è sempre approssimativamente qualitativa.

---

[1]) Questo metodo di misura è stato, nell'ottobre 1937, mostrato alla Commissione di revisione delle Raccomandazioni del Comité Consultatif International Téléphonique, (CCIF), venuta in visita in Italia.

È stato quindi introdotto nelle Raccomandazioni CCIF (testo di Roma e testo di Oslo). (V. ad es.: H. Bourquin, Protection contre la corrosion électrolytique. Bull. ASE, 1937, N. 24, p. 1073. E. Soleri. La protezione contro le corrosioni elettrolitiche e le nuove raccomandazioni del CCIF. L'Energia Elettrica. Marzo 1939 - XVII).

Un tentativo per definire e controllare questo complesso di parametri variabili che influiscono sulle dispersioni e sugli assorbimenti di corrente da parte di una struttura metallica, interessata al fenomeno delle correnti vaganti, è stato fatto con la introduzione dei « coefficienti di passaggio » (o anche « resistenze di passaggio »).

Di tali coefficienti, tendenti a definire l'attitudine di una struttura a scambiare corrente con il mezzo ambiente (terreno), ne sono stati introdotti diversi: rotaia-terreno, rotaia-condotta, condotta-terreno, ecc. Essi sono stati oggetto di vive discussioni, e su questo argomento si è molto dibattuto in seno a vari organi internazionali, poichè per sottoporre a calcolo una rete di rotaie, dal punto di vista dei fenomeni di corrosione, bisogna introdurre nelle formule dei valori numerici dipendenti da questi coefficienti, o fare delle ipotesi al riguardo.

I valori generalmente adoperati sono ricavati dalle esperienze del Bureau of Standards [2]) su una serie di binari sperimentali, e sono fondati sull'esperienza di molti anni di alcune nazioni.

In relazione al lavoro svolto dal Centro di Napoli per lo studio dei fenomeni di corrosione, ci eravamo proposti di eseguire delle misure di questi coefficienti di passaggio. Non abbiamo però insistito in tale direzione: sia perche i primi tentativi eseguiti ci hanno presto mostrato che i metodi di misura comuni non possono fornire risultati attendibili se non in particolari condizioni, sia perchè l'orientamento attuale delle regolamentazioni internazionali o non utilizza la conoscenza dei valori assoluti dei coefficienti di passaggio o prevede solo quella dei loro rapporti ad uno di essi preso come riferimento [3]), [4]); si può ammettere anche, sulla base dell'esperienza di alcuni paesi, che tali rapporti rimangano costanti nel tempo, al variare delle condizioni reali.

Ci siamo quindi orientati verso la misura della corrente assorbita o dispersa da una struttura metallica interrata, perchè questo parametro, di notevole interesse dal punto di vista pratico, è generalmente poco controllato nello studio delle corrosioni per correnti vaganti. Esponiamo qui di seguito i primi risultati ottenuti.

La misura in oggetto può essere semplicemente ottenuta per differenza delle correnti circolanti in due tratti non contigui della struttura interessata. E tale metodo è stato in generale applicato, sopratutto ai cavi tele-

---

[2]) Shepard E. R., Leakage resistance of street railway roadbeds, etc. Technologic Papers of the Bureau of Standard, N. 127; 1919.

[3]) CCIF, Recommandations concernant les mesures à prendre pour la protection des cables contre le corrosion électrolytique. Testo di Oslo, 1938.

[4]) Régles à suivre..... etc. ASE, 1928.

fonici [8]; ma la sua esecuzione richiede il rilievo contemporaneo delle correnti in due tratti di cavo e poi — se non si ha una registrazione diretta — la costruzione di due diagrammi che vanno sovrapposti; le misure, per avere un risultato attendibile, debbono avere una certa durata. Modernamente si è ricorso alla registrazione fotografica della caduta di potenziale su due tratti di cavo. Per il caso dei binari tranviari o ferroviari questi sistemi non ci risultano applicati; invece in relazione alle misure dei coefficienti di passaggio, si è misurata, di notte, ad esercizio tranviario sospeso, la corrente dispersa da un tratto di binario, facendo la differenza fra le correnti in due tratti lontani di rotaie calcolate dalle cadute di tensione. È evidente che tale metodo di misura per differenza deve in generale implicare un notevole errore; si tratta infatti della determinazione di una piccola grandezza, per differenza di due grandezze omogenee di valore molto più grande, ed indirettamente misurate.

Per tale ragione pensammo che era preferibile di eseguire il rilievo mediante un metodo che fornisse direttamente il rapporto o la differenza delle correnti in due punti delle rotaie. Ci siamo poi subito orientati verso un metodo di misura che fosse applicabile durante l'esercizio degli impianti di trazione, poichè non è mai possibile di riprodurre artificialmente la distribuzione dei potenziali e le condizioni elettriche dovute all'esercizio normale, mentre tali condizioni hanno grande influenza sui valori degli scambi di corrente.

Lo schema è indicato nella fig. 1. Sia AD la struttura in esame: i punti A, B, C, D, sono punti di collegamento di conduttori metallici in buon contatto, (preferibilmente saldati) con la struttura medesima. Nella ipotesi che le correnti I_1 e I_2 abbiano lo stesso senso e che nel tratto da A a D non vi sia alcun apporto o sottrazione di corrente per cause estranee alla dispersione, l'applicazione del 2.° principio di KIRCHHOFF alle maglie $ABFD$ e $CDFE$ dà, secondo le notazioni dello schema:

$$\begin{aligned} R_1 I_1 + r_1 i_1 + r_g i_g - r_3 i_3 &= 0 \\ R_2 I_2 + r_2 i_2 - r_g i_g - r_4 i_4 &= 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

Si possono avere due casi:

I.

Nella ipotesi che sia $i_g = 0$, si ha:

---

[8]) V. ad es.: Einar STRÖM, L'électrolyse des cables souterraines. The L. M. Ericsson REVIEW, 1929, N. 4-6, 7-9. W. G. RADLEY, Determination of the cause of sheat corrosion. Electrical Engineering, Aprile 1938, p. 168.

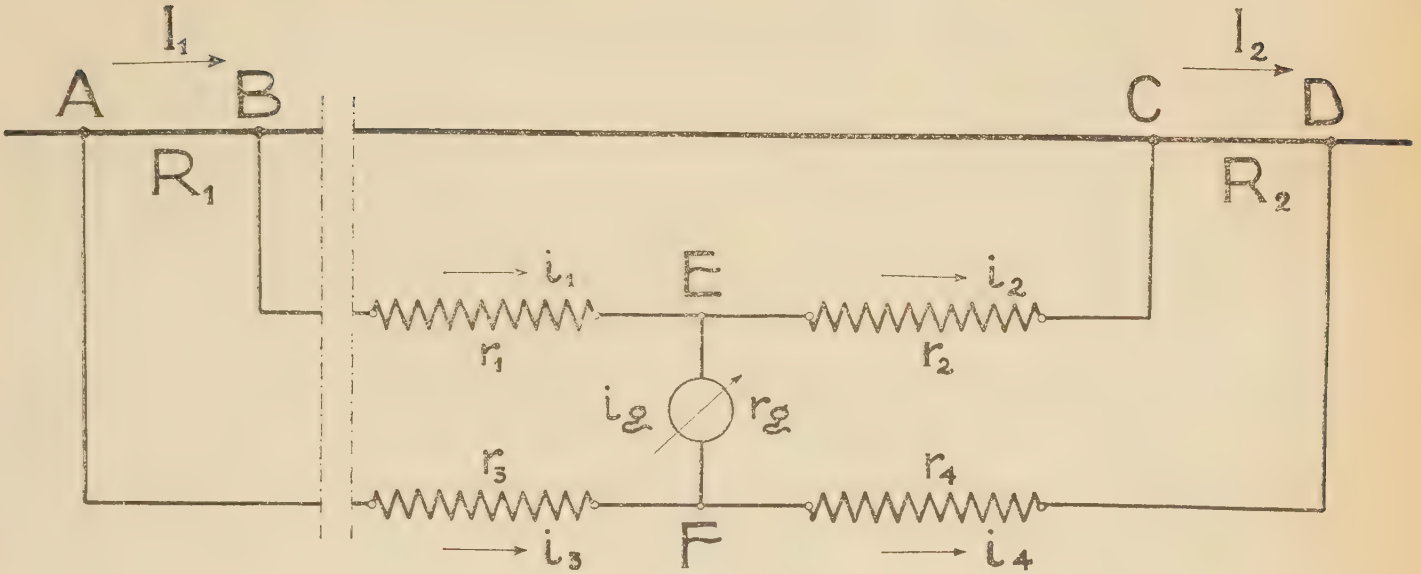


Fig. 1.

$$i_1 = i_2 \qquad i_3 = i_4 \tag{2}$$
$$R_1 I_1 + r_1 i_1 - r_3 i_3 = 0 \tag{3}$$
$$R_2 I_2 + r_2 i_1 - r_4 i_3 = 0$$

facendo il rapporto membro a membro delle due equazioni (3) e supponendo $r_3 = r_1$; $r_4 = r_2$, si ha:

$$\frac{R_1 I_1}{R_2 I_2} = \frac{(i_3 - i_1)\, r_1}{(i_3 - i_1)\, r_2} = \frac{r_1}{r_2}. \tag{4}$$

Se si ammette $R_1 = R_2$ si ha:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_1}{r_2}. \tag{5}$$

Il rapporto delle due resistenze r_1 ed r_2 è uguale al rapporto delle due correnti che circolano nei due tratti di struttura AB e CD. Tale rapporto permette facilmente di conoscere percentualmente il valore della corrente assorbita o dispersa nel tratto $B\ C$.

Se separatamente si misura una delle due correnti I_1 e I_2, con un metodo qualunque — ad esempio caduta di potenziale — possono allora conoscersi anche i valori assoluti di tali correnti, e di quella dispersa o assorbita.

II.

Sottraendo membro a membro le equazioni (1) si ha:

$$R_1 I_1 - R_2 I_2 + r_1 i_1 - r_2 i_2 + 2\, r_g i_g - r_3 i_3 + r_4 i_4 = 0. \tag{6}$$

Se si ammette che sia:

$$R_1 = R_2 \quad ; \quad r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = r, \tag{7}$$

si ha:

$$R(I_1 - I_2) + r(i_1 - i_2 + i_4 - i_3) + 2\, r_g i_g = 0$$
$$R(I_1 - I_2) + 2\, r_g i_g + r\, i_g = 0 \tag{8}$$

per essere

$$i_1 - i_2 = i_g \quad ; \quad i_4 - i_3 = i_g. \tag{9}$$

Si ottiene quindi:

$$R(I_1 - I_2) = -2(r + r_g)\, i_g$$
$$I_2 - I_1 = \frac{2(r + r_g)\, i_g}{R} \qquad (10)$$

ossia:

La deviazione del galvanometro è proporzionale alla corrente dispersa o assorbita nel tratto in esame, e, con uno strumento adatto, se ne può fare la registrazione nel tempo.

Il metodo è stato applicato facendo uso di un ponte doppio di Thomson che costituiva il complesso delle quattro resistenze r_1, r_2, r_3, r_4, e di un galvanometro a lettura diretta, ossia di apparecchi comuni; in effetti un ponte doppio possiede i requisiti necessari per soddisfare alla condizione:

$$r_1 = r_3 \quad , \quad r_2 = r_4$$

del primo caso, conservando ad r_2 e r_4 la variabilità necessaria all'azzeramento ($i_g = 0$).

La condizione $r_1 = r_2 = r_3 = r_4$ è poi di semplicissima realizzazione.

Quanto finora si è esposto ha un carattere del tutto generale, e quindi il metodo è applicabile ai vari tipi di strutture metalliche interrate che possono assorbire o disperdere correnti: cavi telefonici, di energia, condotte, binari, ecc.

Poichè sono state introdotte alcune ipotesi relativamente ai valori delle resistenze r ed R, è opportuno procedere ad un breve esame:

a) della possibile realizzazione delle ipotesi fatte nei riguardi dei vari tipi di strutture;

b) di alcune principali cause di errore finora non considerate, ricordando però che, per la normale approssimazione che si consegue in questo campo di misure, non è qui necessario nè utile ricercare una grande precisione.

La prima ipotesi introdotta è quella che nel tratto $A\ D$ non vi siano — oltre la dispersione — altre cause di apporto o di sottrazione di corrente. Questa condizione può ritenersi senz'altro soddisfatta allorquando si tratti di cavi o di condotte; per il caso di reti tranviarie, sul tratto $A\ D$ non vi devono essere collegamenti di alimentatori negativi nè vetture sui binari; questa ultima condizione può rendere un po' lunga la misura se il traffico tranviario della zona è molto intenso.

A questo proposito è forse bene mettere in evidenza che la esecuzione materiale della misura è di durata brevissima; paragonabile a quella che si ha in laboratorio adoperando il ponte doppio; pur essendo le correnti di origine tranviaria estremamente variabili, poichè la legge di variazione è

praticamente la stessa per i tratti AB e CD, il movimento dell'indice del galvanometro è tranquillissimo, senza alcuna oscillazione. Occorre piuttosto preparare con cura ed attenzione l'impianto dei fili di collegamento, ma la esecuzione materiale della misura è oltremodo semplice. Di conseguenza la condizione che sul tratto $A\ D$ non vi siano vetture tranviarie basta che sia realizzata anche per tempi molto brevi dell'ordine di qualche minuto primo. Naturalmente lo sperimentatore non si contenta di una sola lettura, ed occorre attendere un poco per ripetere la misura; durante il passaggio delle vetture, come è intuitivo, il ponte si squilibria.

L'altra condizione introdotta è quella: $R_1 = R_2$. Da un punto di vista generale, e relativamente al primo caso, sarebbe sufficiente anche la sola conoscenza dei valori di R_1 e R_2 ma è preferibile realizzare la loro uguaglianza.

Il controllo di questa può farsi con uno dei diversi metodi adatti allo scopo [6]), in relazione al tipo di membratura su cui si deve operare. In parecchi casi può essere sufficiente di scegliere lunghezze uguali della stessa membratura. Se si tratta di cavi o di condotte, la resistenza di lunghezze uguali della guaina del cavo, o di tratti di condotte senza giunti, si può ritenere in generale uguale; se vi sono in atto fenomeni di corrosione, occorre il controllo, che in questi casi non è molto difficile.

Se si ha invece a che fare con una tratta di binario vengono in conto delle altre osservazioni. Qui si hanno non meno di due rotaie e spesso quattro. Non si può eseguire la misura su di una sola rotaia e nemmeno su di un solo binario, perchè essi sono collegati fra di loro, e perchè potrebbero aversi scambi di corrente fra le diverse file di rotaie. Inoltre, per il fatto che si legge la caduta di potenziale su di una sola fila di rotaie, occorre, affinchè la misura abbia significato, che la ripartizione delle correnti nelle varie file di rotaie sia uniforme. Al fine di garentire questo risultato abbiamo trovato conveniente di disporre quattro connessioni trasversali, saldate alle rotaie stesse e di conveniente sezione, immediatamente prima e dopo dei punti di misura. La fig. 2 mostra la disposizione di assieme. Le distanze indicate sulla figura stessa rappresentano un ordine di grandezza che abbiamo sperimentato nelle misure su reti di rotaie, ma naturalmente possono variare a seconda della struttura e delle condizioni di prova.

È sempre bene che le rotaie dei tratti AB e CD siano dello stesso tipo e della stessa sezione; se esse sono state posate assieme, si ha praticamente $R_1 = R_2$. Noi abbiamo, nelle nostre prove, eseguiti gli opportuni controlli, adoperando l'attrezzatura della vettura prova-giunti dall'Azienda Tran-

[6]) V. ad es. M. M. Jacopetti, Misure relative alle correnti vaganti. Rendiconti AEI, 1935, S. Margherita Ligure.

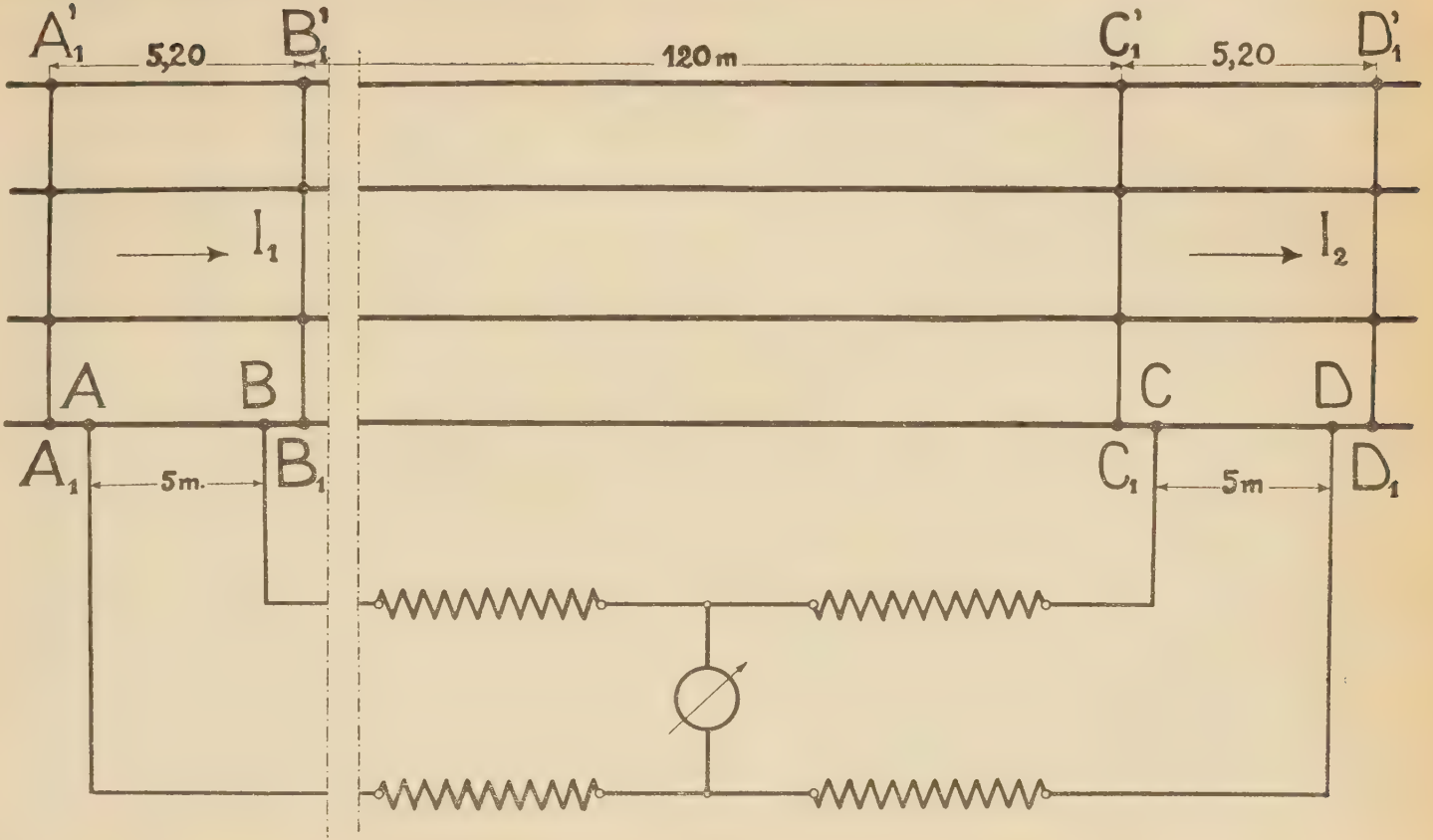


Fig. 2.

viaria del Comune di Napoli [7]). Ci siamo anche preoccupati del controllo dell'uguale ripartizione della corrente nelle quattro file di rotaie, e per farlo abbiamo di notte, ad esercizio sospeso, fatto circolare sulla linea un carico concentrato costituito da quattro vetture a carrelli. Eseguito l'azzeramento del ponte quando le vetture erano a notevole distanza (oltre 1 Km) abbiamo poi fatto avvicinare il carico al tratto di misura ed osservato per quale distanza del carico dall'ultima connessione trasversale, $A_1 A'_1$, si cominciava ad osservare uno squilibrio al ponte. Questa distanza è risultata di qualche decina di metri. Eseguendo le misure durante l'esercizio, allorchè il traffico tranviario è continuo e distribuito sui due binari si è certamente in condizioni più favorevoli all'uguale ripartizione della corrente.

Resta ancora da considerare qualche causa di errore; come ad esempio la influenza dei fili di connessione i quali sono una parte delle resistenze r. Se queste sono di valore elevato, (il che conviene e deve farsi anche per altra ragione) è sufficiente che la stazione di misura sia al centro della tratta AD; o più precisamente che i fili di connessione siano della stessa lunghezza e della stessa sezione. In sostanza, se la resistenza di questi fili può farsi molto piccola rispetto a quella delle r, allora essa può trascurarsi; diversamente non vi è alcuna difficoltà a tenerne conto. È anche naturalmente possibile di porre la stazione di misura ad una estremità della tratta e di equilibrare la resistenza dei fili di connessione mediante delle resistenze esterne. Tuttavia, data la normale approssimazione conseguita nelle misure relative alle correnti vaganti, prendendo le opportune cure, non è in generale necessario di apportare la correzione relativa a questo errore, a meno che non lo consiglino i valori relativi delle resistenze dei tratti di connessione e delle r.

Si può infine considerare l'errore dovuto alla corrente sottratta dal circuito di misura.

Abbiamo già detto che conviene di tenere i valori della r di ordine elevato; dati i valori normali delle differenze di potenziale tra A e D e tra B e C per le lunghezze considerate è facile di vedere che le correnti derivate dal circuito di misura sono normalmente trascurabili rispetto a quelle da valutare.

La sensibilità del metodo è buona; di notte abbiamo fatto delle misure con correnti molto deboli, come quella dei quattro compressori d'aria delle motrici, e di illuminazione delle stesse.

Come si è detto il sistema è applicabile, con le dovute osservazioni, a tutti i tipi di strutture interrate: ma si presta a molte altre utili applicazioni.

---

[7]) Eller Vainicher L., Vettura per la verifica dei giunti delle rotaie. Rendiconto AEI, Gardone 1934. — Id., Vettura per la verifica dei giunti delle rotaie, Nota aggiunta). L'Elettrotecnica. Vol. XXIII, pag. 327 (1936).

Il metodo si è rivelato capace di fornire indicazioni utili; non solo perchè consente la misura di un parametro fin' oggi poco controllato, ma anche perchè ci ha permesso, in un caso particolare, di mettere in evidenza un' anomalia dipendente da fenomeni di scambio fra una tranvia e una ferrovia secondaria, che diversamente forse non si sarebbe potuto controllare. Abbiamo constatato che all' interno della città, con binari saldati e pavimentazione, in buone condizioni, di basoli con giunti catramati, con tempo asciutto, la dispersione si riduce a valori molto piccoli (qualche unità per cento), mentre in altri casi, con pavimentazione di maccadam e suolo bagnato, si sono avuti valori molto elevati (diverse decine di unità per cento, a seconda dei posti e delle condizioni).

Ringraziamo sentitamente la Fondazione Politecnica del Mezzogiorno d' Italia, che, generosamente, ha favorito questa come le altre ricerche de Centro di Napoli per lo studio dei fenomeni di corrosione, nonchè l'Ente Autonomo Volturno, Gestione dell' Azienda Tranviaria del Comune di Napoli e segnatamente il consulente tecnico Ing. Eller Vainicher e l' Ing Molea che hanno messo a disposizione impianti, personale e materiale per mettendo la esecuzione delle prove e collaborando ad esse.

Sulla convergenza delle serie ed i suoi caratteri gruppali (convergenza assoluta, incondizionata, totale)

Nota del socio corrispondente Prof. **Giulio Andreoli**

(Adunanza del dì 7 giugno 1939 - XVII)

Sunto. — L' A. riprende e prosegue alcune sue precedenti ricerche, e mostra ancora come una teoria completa delle serie debba avere carattere gruppale.

1. A fianco del semplice concetto di convergenza o di sommabilità di una serie si presenta — per la convergenza — la coppia di concetti di « assoluta convergenza » e di « incondizionata convergenza ». Essi, ove si parta dall' abituale definizione di convergenza, coincidono.

Un ulteriore definizione, nuova, riteniamo che possa essere quella di « *convergenza totale* » che qui indicheremo. Nel caso della abituale definizione di somma di una serie anch' essa coincide con le altre due di « assoluta » o di « incondizionata »: però rispetto ad altri metodi di sommazione, (per serie *non* convergenti, ma sommabili) le tre definizioni potrebbero risultare non equivalenti. Inoltre se si riattacca la teoria delle serie a quella dei gruppi di sostituzioni [1]) su infiniti elementi, i tre concetti indicati possono avere gruppi diversi nel senso da noi già indicato.

2. La definizione di « *convergenza totale* » partendo dall' abituale ordinaria sommazione è semplicissima.

Una serie è totalmente convergente se *qualsiasi* serie da essa estratta è a sua volta convergente.

In base alla stessa definizione (poichè una serie estratta da un' altra, se questa sia a sua volta estratta da una terza, è anch' essa una serie estratta da questa terza) risulta che: *ogni serie estratta da una totalmente convergente, è anch' essa totalmente convergente.*

Per serie estratta da una data intendiamo quella formata con certi termini della data, *scritti nel loro ordine*, consecutivamente.

Poichè si tratta di condizione imposta, potremo lasciare o seguirsi l'un l' altro i termini estratti, nell' ordine stesso della serie originaria, oppure sostituire a quelli tralasciati altrettanti zeri.

---

[1]) Cfr. Andreoli G., « *Sui gruppi di sostituzione che operano su infiniti elementi* ». Rend. Circ. Mat. Palermo. Tomo XL. II sem. 1935. Id., « *Nuova teoria delle serie semplici etc.* ». Rend. R. Acc. Sc. Napoli s. 4.ª vol. V, 1935. Id., « *Sui criteri di convergenza delle serie* ». Ibid. s. 4.ª vol. VI, 1936.

Così, se dalla

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots\ldots$$

estragghiamo la serie dei termini i cui indici sono potenze di due, potremo considerare tanto la serie

$$a_1 + a_2 + a_4 + a_8 + \ldots\ldots$$

con la prima accezione, quanto la serie

$$a_1 + a_2 + o + a_4 + o + o + o + a_8 + \ldots\ldots$$

con la seconda accezione.

Per la sommazione ordinaria delle serie, ciò non porta differenze; invece, allorchè al concetto di somma ordinaria di una serie si sostituisce quello di somma secondo un metodo di sommazione, queste due definizioni in generale *non* coincidono: noi conserveremo la seconda; ed ove invece occorra la prima, la diremo « in *senso lato* ».

3. Che le tre definizioni, nel caso della convergenza ordinaria coincidano, è evidente.

Infatti, già conosciamo l'equivalenza fra serie incondizionatamente e serie assolutamente convergente.

Mostriamo ora che una di queste serie è anche convergente in modo totale, e reciprocamente.

Se la serie è assolutamente convergente, una qualsiasi altra serie da essa estratta si può ottenere da quella dei moduli, moltiplicando rispettivamente i termini di questa per 1 (quelli reali positivi estratti), per — 1 (quelli reali negativi estratti) per quantità di modulo unitario (quelli complessi estratti) per zero (quelli non estratti).

Pertanto la serie estratta (nella seconda accezione già detta) si presenta ottenuta da quella dei moduli, moltiplicandone in termine n-esimo per ε_n, ove $|\varepsilon_n| = 1$ oppure 0.

E per notissimi teoremi la convergenza assoluta della serie data implica quella assoluta della serie estratta.

Reciprocamente, la serie converga totalmente. Ciò significa — con evidente ed immediata verifica — che devono convergere totalmente sia la serie delle parti reali che quella delle complesse. Quindi in ogni caso ci riconduciamo a serie a termini reali. Se la serie a termini reali converge totalmente, dovranno convergere sia quella estratta, formata dai *soli* termini positivi, sia quella residua — che a sua volta si può estrarre — formata dai *soli* termini negativi.

Qui si ripresenta la seconda accezione; cioè di termini alternati a zeri.

Se quella dei termini negativi converge, convergerà anche quella ottenuta cambiando segno a tutti i suoi termini; e poichè anche quella dei termini positivi converge, risulta convergente anche la serie-somma; cioè quella formata dai termini positivi della data, e da quelli negativi presi in valore assoluto (cambiati di segno cioè) ciascuno al proprio posto.

Questa è precisamente (nel caso di termini reali) la serie dei moduli; dunque la convergenza totale implica quella assoluta. Pertanto:

Con l'abituale concetto di somma di una serie, le tre definizioni: convergenza assoluta, convergenza incondizionata, convergenza totale (nelle sue due accezioni) coincidono.

4. Passiamo a vedere se, pur conservando l'abituale concetto di somma ma riferendoci a particolari gruppi operanti sui termini, le tre definizioni coincidono ancora.

Intanto, noi possiamo parlare così di convergenza incondizionata relativa ad un gruppo.

Si tratta di gruppi di sostituzioni che operano su infiniti elementi.

Cominciamo già dall'osservare che, nel caso della ordinaria convergenza incondizionata, si opera o con sostituzioni che operano su un numero finito di elementi o con sostituzioni che ammettono l'inversa: e che quindi si decompongono in cicli ordinari, in numero finito o infinito, ed in anelli, escludendo le catene (per questa terminologia cfr. loc. cit.).

Invece quando si parla di convergenza totale, secondo la prima accezione, si possono precisamente presentare catene, anzi si presentano effettivamente, in quanto degli elementi si perdono.

E se supponiamo — tanto per unificare — di scrivere ogni serie alternando ai suoi termini uno zero (sicchè i termini pari restano quelli della serie originaria, i dispari gli zeri) rientra in questo tipo anche la seconda accezione; però il gruppo di prima, quello della convengenza incondizionata ordinaria, opererà adesso unicamente sui termini pari.

La convergenza assoluta di una serie può anche definirsi attraverso il fatto che, moltiplicando *comunque* i termini della serie per quantità limitate (nel loro complesso) in modulo, la nuova serie ottenuta è ancora convergente.

In altre parole, la convergenza assoluta così vista, corrisponde al passaggio dalla serie data convergente

$$[A] \equiv a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots$$

all'altra serie

$$[U, A] \equiv u_0 a_0 + u_1 a_1 + u_2 a_2 + u_3 a_3 + \ldots\ldots$$

dove

$$|u_n| < u^*,$$

anch'essa convergente, *qualunque sieno le* u_n *ed* u^*. Tutti questi passaggi formano un gruppo, sia additivamente, sia moltiplicativamente.

Ed infatti, operando un passaggio con le u, uno con le v, ed uno con le $u+v$, si ha intanto la convergenza di

$$\sum u_r a_r \quad ; \quad \sum v_r a_r$$

e quindi di

$$\sum (u_r + v_r) a_r$$

serie somma delle due.

Inoltre se

$$|u_r| < u^* \quad ; \quad |v_r| < v^*$$

sarà certamente

$$|u_r + v_r| < u^* + v^*$$

ed è quindi verificata la proprietà gruppale rispetto alla somma.

In modo perfettamente analogo, con

$$\sum u_r a_r \quad , \quad \sum v_r a_r$$

convergerà anche

$$\sum u_r v_r a_r.$$

Si delinea in tal modo una doppia ulteriore estensione del concetto di convergenza assoluta, o incondizionata, o totale. La prima estensione consiste nell'esaminare gli ordinari concetti non rispetto a tutta la serie in esame. ma rispetto a serie da essa estratte.

Nella infinità Ω, (avente la potenza del cantinuo) delle serie estratte da Σ, ve ne può essere una parte Ω', costituita da serie Σ' estratte da Σ, per le quali risultano verificate le condizioni di assoluta convergenza, etc.; ed un'altra parte Ω'' per le cui serie Σ'', queste condizioni non risultano verificate.

Se due serie parziali Σ_1 , Σ_2 di Σ sono ambedue in Ω' anche la loro serie « intersezione » $\{\Sigma_1 . \Sigma_2\}$ formata con i termini comuni ad entrambe è ovvia-

mente in Ω' e così *ogni* serie estratta di Σ_1 o Σ_2; anche la loro « congiungente » $[\Sigma_1, \Sigma_2]$ cioè quella che contiene tutti e soli i termini di entrambe vi appartiene.

Se invece ambedue appartengono ad Ω'', la loro intersezione può appartenere sia ad Ω' che ad Ω''; la loro congiungente invece ad Ω''.

Se infine una appartiene ad Ω' ed una ad Ω'', la loro intersezione appartiene a Ω' la loro congiungente ad Ω''.

Si presentano per questa via, settogruppi del gruppo totale di permutazioni.

5. La seconda estensione consiste nel considerare invece, a fianco della convergenza della serie data, la convergenza delle serie

$$\sum u_n a_n$$

dove le u_n soddisfino a particolari condizioni di limitazione, riproducentesi gruppalmente per addizione e per prodotto, nel senso che se le u_n, v_n soddisfano a quelle condizioni, vi soddisfano anche $u_n + v_n, u_n v_n$.

Ad esempio, si può imporre la condizione che $\lim u_n = 0$; oppure che a questo limite si arrivi come un certo infinitesimo di ordine finito, etc.

Naturalmente sia la prima che la seconda estensione possono essere applicate a metodi di sommazione.

6. Da quanto precede resta delineata ancora una volta che una teoria completa delle serie *deve* di necessità avere un indirizzo gruppale.

UDALRIGO MASONI

nato in Napoli l'11 luglio 1860 morto in Napoli il 29 settembre 1936

UDALRIGO MASONI

Commemorazione letta dal socio ordinario **Carlo Luigi Ricci**

nell' adunanza del dì 7 giugno 1939 - XVII

On.le Presidente, Illustri Accademici, Signori, Camerati,

Debbo anzitutto pregarVi di concedermi venia per il ritardo con cui adempio l'onorifico e mesto incarico da Voi conferitomi, e son certo di essere scusato, poichè il ritardo è essenzialmente dovuto a gravi, avverse contingenze che mi colpirono.

Temo inoltre che le mie parole siano inadeguate a compiere una degna rievocazione della grande, luminosa figura dell' insigne uomo, scienziato, maestro che oggi commemoriamo. Se sarò manchevole, per essere perdonato mi valga la commossa venerazione ch'io sento ed esprimo per la sua tuttor viva memoria, ed anche la vigile cura che ha guidato i miei sforzi per sintetizzare ed illustrare la sua feconda, poderosa e multiforme opera, infine

« Vagliami il lungo studio e il grande amore
Che m' ha fatto cercar lo suo volume ».

Udalrigo Masoni nacque in Napoli l'11 luglio 1860 dal Sig. Luigi e dalla Sig.ra Filomena Tadiglieri.

Fin dalla giovinezza la sua preparazione culturale fu varia e complessa. Conseguì nella R. Università di Napoli, nel 1881 la laurea di dottore in Matematiche pure, ed insieme il Diploma della Scuola di Magistero, con l'abilitazione professionale all'insegnamento secondario delle Matematiche.

Il suo pensiero scientifico si formò dunque nella celebrata Scuola matematica Napoletana, che in quegli anni era fiorentissima, ed illustrata da insigni maestri, quali — per tacere d'altri — Nicola Trudi, Giuseppe Battaglini, Ettore Caporali, Fortunato Padula.

Particolarmente quest'ultimo esercitò benefico influsso e lasciò durature impronte per la formazione culturale del giovane Masoni. Ed invero, com'è ben noto, il Padula oltre che sommo matematico, era anche valentissimo tecnico; i suoi studî, lavori, insegnamenti, con rara versatilità, e con pari profondità spaziavano dal calcolo infinitesimale e dalle geometrie, alla meccanica razionale, alla meccanica superiore, fino alle discipline dell' ingegneria, meccanica applicata alle costruzioni ed idraulica. La sua scuola si affermò assai feconda con la formazione di grande numero di

valentissimi allievi. L'influsso e l'esempio di tanto maestro non poteva non ripercuotersi nella formazione della mentalità scientifica del Masoni, il quale notoriamente e come vedremo ebbe egli pure ingegno versatile, cultura varia ed attività scientifica multiforme.

Infatti il giovane matematico, dopo soli due anni di studi applicativi nella nostra R. Scuola d'Applicazione per gli Ingegneri conseguiva nel 1883 la laurea di Ingegnere civile.

Ancora studente aveva ottennte ambite distinzioni: tre medaglie accademiche di prima classe, meritate in concorsi per il calcolo infinitesimale, la geometria proiettiva e la meccanica razionale presso la nostra Università, negli anni 1879 e 1880.

Mentre ancora frequentava i corsi di Ingegneria, iniziò nel 1882 la sua produzione scientifica con una memoria sulle curve del quarto ordine; tale produzione proseguì intensa, nel giro di quattro anni, con nove poderose memorie scientifiche su argomenti varî e precisamente due di geometria, quattro di meccanica razionale e tre di meccanica applicata alle costruzioni: questo gruppo di lavori (di cui dirò più innanzi) costituisce un singolare, tutt'altro che comune, esordio di preparazione culturale e di attività scientifica per un Ingegnere destinato a divenire poi un valentissimo ed insigne idraulico.

Il 5 febbraio 1884 il Masoni fu nominato Assistente presso la R. Scuola d'Applicazione per gli Ingegneri in Napoli, iniziando così quella attività didattica nell'insegnamento superiore che doveva poi durare ininterrotta per ben 51 anni, con quei cospicui frutti che ognuno conosce!

Nell'aprile 1885 il Masoni conseguì presso la R. Università di Napoli la libera docenza in meccanica razionale; e ad attestare la singolare vastità della sua preparazione e la non comune versatilità della sua mente, ci risulta che presso la R. Scuola d'Applicazione per gli Ingegneri in Napoli, conseguì in breve volgere di tempo altre due libere docenze; in Meccanica applicata alle costruzioni nel dicembre 1886, ed in Idraulica teoretica e pratica nel luglio 1888. (Tre abilitazioni in poco più di tre anni!).

In quel tempo ebbe pure occasione di dedicarsi all'insegnamento secondario: nel maggio 1882 per concorso fu nominato professore di matematiche nel Liceo-Ginnasio « Domenico Cirillo » in Napoli, e nel febbraio 1885 pure per concorso fu designato professore di matematiche per il corso normale nella Scuola Industriale delle Marche a Fermo.

Ma frattanto non mancava di affermarsi anche nel campo dell'insegnamento superiore, con la ben nota versatilità: infatti nell'ottobre 1885 fu dichiarato eleggibile nel concorso per la cattedra di Algebra e Geometria analitica nella R. Università di Messina, e nell'aprile 1886 fu riconosciuto eleggibile nel concorso per la cattedra di Meccanica applicata alle costruzioni nella R. Scuola di Applicazione per gli Ingegneri annessa alla R. Università di Palermo.

Poi nel novembre 1886 fu incaricato dell'insegnamento dell'Idraulica teoretica nella R. Scuola d'Applicazione per gli Ingegneri di Napoli, immettendosi così nella definitiva via del suo curriculum didattico: dello stesso anno è la prima raccolta litografica delle sue lezioni; del novembre 1887 è la sua magistrale « Prolusione » al detto corso, della quale dirò più innanzi.

I suoi lavori scientifici successivi sono poi ormai tutti nel campo dell'Idraulica.

Col 1.° febbraio 1893, in séguito a concorso fu nominato professore straordinario di Idraulica teoretica e pratica nella R. Scuola d'Applicazione per gli Ingegneri di Napoli, e per la stessa cattedra fu promosso professore ordinario dal 1.° dicembre 1896, essendo poi nel dicembre 1898 nominato Direttore del Gabinetto di Idraulica annesso alla cattedra suddetta. Questi uffici furono da lui tenuti con sommo onore fino al 1935, quando dovette essere collocato a riposo per gli inesorabili limiti d'età.

La gloriosa Scuola Napoletana in cui Egli era stato creato Ingegnere, nelle sue varie successive denominazioni di R. Scuola d'Applicazione per gli Ingegneri, di R. Scuola Superiore Politecnica, di R. Istituto Superiore d'Ingegneria, e di R. Scuola d'Ingegneria, fu da Lui diretta con grande amore e con singolare competenza per ben venti anni, dal 1909 al 1929.

Queste sono le linee schematiche della sua attività didattica.

La dolorosa perdita che ancora oggi piangiamo si verificò il 29 settembre 1936, XIV: non era ancora decorso un anno da quando Egli aveva interrotta quell'opera fervorosa ed illuminata in pro' della Scuola, che era stata la cura più assidua della Sua nobile e fattiva vita.

Debbo ora riferire pure schematicamente i riconoscimenti ufficiali da Lui ottenuti nel campo scientifico.

Socio non residente nel Circolo Matematico di Palermo, dal febbraio 1887.

Nel R. Istituto d'Incoraggiamento di Napoli: socio corrispondente dall'ottobre 1889, e socio ordinario dal febbraio 1897.

Socio ordinario residente dell'Accademia Pontaniana di Napoli dal febbraio 1894. Presidente della Classe di Scienze Matematiche dal 1923 al 1925.

Nella nostra Accademia delle scienze fisiche e matematiche: socio corrispondente dal 9 luglio 1898 socio ordinario dal 24 giugno 1922.

Nel 1926 fu Vice Presidente della nostra Accademia e poi nel 1927 Presidente della Società Reale di Napoli.

Come è ben noto il Masoni prese anche attivissima parte alla vita pubblica: permettetemi di elencare qui le tappe più salienti di tale sua attività.

Membro della Commissione tecnica per il risanamento di Napoli dal gennaio 1887.

Membro del Consiglio di Amministrazione del R. Istituto Orientale di Napoli dal settembre 1895.

Componente della Giunta di vigilanza del R. Istituto Tecnico e Nautico di Napoli dal gennaio 1896.

Consigliere Comunale a Napoli nel 1895, nel 1904 e nel 1906.

Assessore per le Opere Pubbliche nel Municipio di Napoli dall'agosto 1895 al febbraio 1896, e per circa 6 mesi nel 1904; poi dimessosi per dissensi con la Giunta sulla questione del riscatto dell'Acquedotto di Serino.

A più riprese componente del Consiglio Direttivo del Collegio degli Ingegneri ed Architetti di Napoli.

Ispettore generale dei lavori dell'esposizione di igiene a Napoli, nel 1900.

Commissario Regio alla Provincia di Napoli, in séguito a scioglimento del Consiglio Provinciale, dal 1902, per alcuni anni fino a nuove elezioni.

Dal 1901 al 1906 fu componente del Consiglio di Amministrazione del secondo gruppo delle Opere Pie, — della Commissione per il riordinamento delle Scuole industriali e professionali nella Provincia di Napoli, — del Consiglio provinciale scolastico.

Come Presidente della relativa giunta di Vigilanza, provvide al riordinamento delle Scuole professionali femminili « Regina Margherita » e « Regina Elena » in Napoli.

Presidente della giunta di Vigilanza del R. Istituto Tecnico e Nautico di Napoli nel 1903.

Vice Presidente della Federazione tra i Sodalizî degli Ingegneri ed Architetti italiani nel 1911.

Membro del Consiglio Superiore della Pubblica Istruzione dal luglio 1915 al luglio 1917 e dal dicembre 1919 al giugno 1923.

Deputato al Parlamento Nazionale per il IX° collegio di Napoli (San Lorenzo), nel maggio 1907, XXII^{a} legislatura, e poi fu rieletto nel 1909, e rimase in carica fino al 1913.

Componente del Consiglio dell'Istruzione Nautica presso il Ministero della Marina nel 1919.

Presidente della Commissione per i lavori di ampliamento del Porto di Napoli (diga dei Granili) nell'anno 1911.

Membro del Comitato Forestale della Provincia di Napoli dal 1891-1925.

Membro della Commissione per la sistemazione doganale nel 1909-1910.

Membro della Commissione Reale che preparò la legge del 1910 a favore di Napoli.

Presidente del Consiglio Tecnico Comunale e della Commissione Edilizia Comunale di Napoli dal 1919 al 1934.

Componente della Commissione conservatrice dei monumenti presso la R. Sopraintendenza di Arte medioevale e moderna per la Campania, dal 1929 al 1936.

I suoi meriti furono riconosciuti e premiati anche con alte onorificenze: dal 1914 era Cav. Uff. dell'Ordine dei S.S. Maurizio e Lazzaro e dal 1920 Gr. Uff.le dell'Ordine della Corona d'Italia.

Notevole fu pure la sua attività nel campo professionale, ove era spesso chiamato e sempre apprezzatissimo per le sue singolari capacità tecniche e scientifiche.

Tra l'altro redasse i progetti di otto importanti acquedotti, tra i quali si debbono specialmente segnalare quello di Castellammare di Stabia e quello d'Isernia. Di quest'ultimo diresse anche i lavori, come pure quelli degli acquedotti di Cusano Mutri e di Braciliano. Durante l'esecuzione della fognatura generale di Napoli tenne la direzione dei lavori dello scaricatore di Coroglio.

Ebbe poi numerosissimi incarichi di natura assai svariata: perizie e collaudi dal Tribunale di Napoli, dalla Società Adriatica delle Ferrovie, da molti Comuni e privati.

La sua attività professionale spesso si innestava e compenetrava inscindibilmente con la sua produzione scientifica: infatti taluni suoi studî scientifici idraulici (v. i N.i 34, 35, 36, 37 e 40 dell'elenco riportato in fine) ebbero origine e riferimento di pratica efficacia in problemi professionali od amministrativi, mentre all'incontro alcune sue relazioni di perizia o di commissione tecnica (v. N.i 17, 30, 41, 42 e 44), per l'elevata natura degli argomenti svolti, per il rigore della trattazione e per i pregi della forma assurgono all'importanza di vere e proprie memorie scientifiche.

Mi sia ora consentito fare un breve esame analitico della vasta e multiforme produzione scientifica del Masoni, non che della efficacissima e benefica sua opera di Maestro e di Direttore, la quale lasciò profonda ed indelebile orma nelle istituzioni scientifiche e didattiche dell'Ingegneria Napoletana.

Già sappiamo della profonda preparazione matematica del Masoni ben dimostrata, insieme con le sue singolari attitudini alla ricerca, dai brillanti e precoci esordî della sua carriera e dalle già citate notevolissime memorie di scienza pura, con cui si aprì la sua produzione. Sappiamo pure che ben presto il Nostro diede non meno brillanti prove nelle Scienze applicate.

Credo di poter affermare che le modalità, gli intenti, l'indirizzo e le direttive di tutta la sua opera di scienziato e di maestro, si possono scorgere sinteticamente raccolte e rivelate in quella magnifica « *Prolusione al Corso di Idraulica Teoretica* », ch'Egli pronunziò il 20 novembre 1887 nel prendere possesso della sua cattedra nella nostra R. Scuola d'Applicazione per gli Ingegneri.

Mentre con copia di dottrina e con perspicua chiarezza ed eleganza di forma Egli sintetizza a scopo programmatico le linee generali della disciplina che s'accinge ad insegnare, insieme traccia magistralmente un mirabile quadro della mutua relazione e dell'armonica ed equilibrata fusione tra scienza pura, esperimento ed avveduto senso pratico, che deve necessariamente regnare in ogni disciplina applicativa, perchè essa possa recare un veramente efficace ed utile contributo all'opera fattiva dell'ingegnere.

Tra l'altro Egli afferma *doversi ritenere « ogni teoria indispensabile » « per dare ai fatti, derivati dalla osservazione, quel coordinamento, senza » « del quale ben difficile riuscirebbe lo studio complesso dei fatti stessi e » « delle applicazioni che ne derivano,... se il pratico non discute i fatti » « che osserva, non li lega col calcolo e col ragionamento, egli non fa che » « una pratica cieca, mentre il teorico, il quale non consulta l'esperienza, » « si espone quasi sempre a gravi errori, quando vuol passare alle appli- » « cazioni »*.

Questo indirizzo, così efficacemente enunciato, non restò lettera morta, ma pervase invece e guidò tutta l'opera scientifica e didattica del Masoni, la quale sotto questo riguardo si può considerare come un magnifico esempio di quello spirito di sereno ed armonico equilibrio tra rigorosa dottrina scientifica e laboriosa, avveduta esperienza, spirito risultante di genialità e profonda preparazione da un lato e di felice intuizione ed illuminato buon senso, tutto latino, dall'altro lato; spirito che si rivela, nei più svariati campi, in tutta l'opera dei maggiori maestri dell'Ingegneria Italiana: tra essi, oltre che per altri cospicui pregi della sua opera, particolarmente sotto il riguardo qui considerato, prende degnamente posto Udalrigo Masoni.

Le sue qualità e virtù cònsone allo spirito qui illustrato sono ampiamente dimostrate fino dal primo gruppo delle nove già citate memorie; gruppo che vorrei definire *pre-idraulico*.

Mentre i due lavori su argomenti di geometria in Lui rivelano profonda preparazione e spiccata genialità matematica, le quattro memorie su problemi di meccanica razionale si fanno notare, oltre che per i poderosi mezzi matematici, e la magistrale abilità nell'impiegarli, anche e specialmente per la singolarmente avveduta scelta degli argomenti, che sono tutti decisamente e squisitamente orientati verso le pratiche applicazioni; trattati con rigoroso metodo scientifico, ma con i risultati formulati in modo da renderne immediato ed agevole l'uso concreto e numerico nelle questioni applicative.

Le tre memorie attinenti alla meccanica applicata alle costruzioni, quantunque siano opere giovanili, non sono semplicemente delle brillanti prove di un giovane aspirante al pareggiamento, ma sono opere degne di un già maturo scienziato, e recano alla scienza delle costruzioni pregevoli ed importanti contributi. Particolarmente notevole è il lavoro relativo alle sollecitazioni dinamiche dei sistemi elastici articolati.

Possiamo dunque riconoscere nel Masoni una spiccatissima versalità, tutta italiana; così da ritenere che se le contingenze della sua carriera non l'avessero chiamato all'idraulica, egli avrebbe potuto con pari competenza, facilità e successo divenire un insigne cultore o di matematiche pure o dei varî rami delle meccaniche applicate.

Altri più competente di me, con maggiore spazio di quello qui ora a me riservato, potrà meglio e più efficacemente svolgere un completo studio

esegetico e critico dei più notevoli contributi recati dal Masoni all'Idraulica teorica e pratica e stabilire il posto che ad essi compete nella storia dello sviluppo di questa scienza.

Io dovrò qui necessariamente limitarmi ad alcuni cenni sommari desunti, oltre che da conoscenza informativa e culturale precedente, anche da apposito, accurato ed amoroso studio dell'opera sua da me compiuto *ad hoc*, al fine di poter degnamente assolvere questo mio compito.

Nelle citazioni indicherò i numeri progressivi dell'elenco riportato in fine.

Le memorie di argomento idraulico sono 29, comprendendo tra esse 7 lavori che hanno forma di discorsi o relazioni, ma contenuto essenzialmente scientifico, e la 1.ª appendice al celebre Corso d'Idraulica, la quale per la densa copia di apporti originali e per lo stile sintetico, si può a ragione considerare come una memoria per sè stante.

Tali memorie si possono poi raggruppare secondo gli argomenti trattati.

Un primo gruppo comprende quattro memorie e la ora citata 1.ª appendice al « *Corso* » (N.ri 12, 13, 14, 22 e 23): esse riguardano l'efflusso dalle bocche a stramazzo: contengono un'esposizione critica, con originali « messe a punto » delle già note teorie relative al problema, ed insieme recano al problema stesso nuovi importanti contributi, specialmente basati su originali rielaborazioni ed interpretazioni dei risultati degli esperimenti eseguiti dal Bazin. Oltre all'ultima che sinteticamente ne riassume i risultati, con altri nuovi, particolarmente notevole è quella segnata con il n. 13, stampata nel 1888 sui Rendiconti di questa Accademia: essa contiene la proposta di una nuova formula per il calcolo della portata; formula che d'allora in poi fu nella tecnica largamente ed utilmente applicata.

Essa rappresenta una notevole e comoda semplificazione nel calcolo relativo ad un fenomeno notoriamente assai complesso, ed influenzato da molti fattori, prima valutabili solo empiricamente, attraverso ad operazioni numeriche non poco laboriose.

Mentre nel primo dei lavori di questo gruppo (N. 12) il Masoni chiudeva augurandosi... « che fra non molto... la teoria dell'efflusso per bocche » « a stramazzo possa essere condotta fuori del campo delle attuali incer- » « tezze », all'incontro, nell'ultimo lavoro dello stesso gruppo (N. 23), dopo circa sei anni, l'Autore potè presentare, in elegante forma, mirabilmente semplice e sintetica, una completa ed organica inquadratura del complesso ed importantissimo problema, con l'esposizione sistematica dei più acconci mezzi analitici per un comodo, agevole e strettamente approssimato calcolo numerico della portata nelle più svariate condizioni di efflusso. Questo lavoro, con i suoi fecondi risultati, fu poi in séguito citato e talora integralmente riportato nei trattati di idraulica; e nei successivi studî sull'argomento fu sempre seguìto l'indirizzo così opportunamente tracciato dal Masoni.

Altro notevolissimo gruppo di sei lavori riguarda varî problemi relativi alle tubulature per trasporto e distribuzione d'acqua (condotte forzate e sifoni). Il primo di questi lavori (N. 16) riguarda le condizioni di minima spesa per le condotte forzate, e pone l'importante problema su basi di maggiore esattezza e rigore scientifico rispetto alle precedenti trattazioni, che erano basate su ipotesi semplificative più grossolane: anche questo lavoro reca all'idraulica pratica un notevole apporto, citato e tenuto presente dagli autori successivi.

Gli altri lavori di questo gruppo riguardano il moto dell'acqua nei tubi delle condotte forzate: alcuni di essi (N.i 20, 31, 32) trattano in via teorica ed analitica il calcolo delle resistenze al moto: particolarmente notevole l'ultimo (32), che fa utilissime applicazioni del còmputo della quantità di moto e della forza viva della corrente idrica. I rimanenti due lavori del gruppo (N.i 34 e 40) espongono risultati di conclusivi esperimenti eseguiti con la partecipazione dell'Autore sui grandi sifoni dell'Acquedotto del Serino, da Cancello a Napoli. Di essi il più importante è il primo (N. 34), i cui risultati sperimentali, sistematicamente ed organicamente elaborati, non che genialmente interpretati dall'Autore, trascendono le particolarità del caso singolo considerato, ed assurgono ad un fondamentale e conclusivo contributo di ampia generalità al problema del moto dell'acqua nelle condotte, e delle resistenze in esso incontrate: i coefficienti e le tabelle ivi elaborati dal Masoni furono d'allora in poi correntemente usati dagli ingegneri idraulici, citati e riportati in tutti i più notevoli trattati d'idraulica ed ancor oggi costituiscono fondamento essenziale per i calcoli numerici pratici relativi al problema considerato.

Due interessantissime memorie teorico-sperimentali, entrambe della nostra Accademia Pontaniana (N.i 26 e 28), riguardano il moto dell'acqua attraverso i sistemi permeabili, ed i relativi coefficienti di filtrazione: in esse sono esposti e descritti alcuni esperimenti magistralmente organizzati ed eseguiti dall'Autore, che poi ne discute i risultati con la sua ben nota singolare abilità matematica: per i terreni composti di granelli grossi l'Autore ricava una originale sua legge di filtrazione, a correzione delle leggi di Darcy, di Girard e di Poiseuille fino ad allora esclusivamente usate in generale, mentre il Masoni dimostra irrefutabilmente che esse sono valide solo nel caso di granelli piccoli: altro notevolissimo contributo conclusivo e definitivo.

Due significativi studî sulla tecnica delle misure di velocità e portata sui corsi d'acqua, ad introduzione dell'idraulica fluviale, sono costituiti dai due lavori (N.i 19 e 24) che riferiscono risultati di esperimenti eseguiti con la solita rara maestria, sul fiume Sarno, particolarmente in prossimità di Scafati. A questo proposito stimo doveroso ricordare che ivi appunto il Masoni aveva istituita e costruita una piccola, ma ottimamente attrezzata stazione idrometrica (quasi la sezione fluviale del Laboratorio di Idraulica),

a scopo di ricerca sperimentale e particolarmente con intenti didattici, in quanto colà annualmente compirono, (come compiono tuttora), le esercitazioni di idraulica numerose generazioni di allievi ingegneri.

Restando ancora nel campo strettamente idraulico, devo segnalare ora cinque memorie su argomenti isolati, e precisamente:

— alcune ricerche sperimentali sui tubi addizionali (N. 18) eseguite nel Laboratorio, condotte e discusse con le ben note, singolari doti di provetto sperimentatore;

— alcuni esperimenti conclusivi sull'uso del contatore d'acqua a « tubo Venturi » (N. 39);

— la geniale proposta di un nuovo regolatore automobile della portata, per luce a battente (N. 21);

— la descrizione tecnica di un mulino idraulico ad alta macinazione in Telese (N.° 29), egregiamente eseguito su progetto e sotto la direzione del Masoni: altra nobile prova della sua rara capacità di tecnico e di professionista;

— infine un lavoro dal titolo: « *Relazione sulle sorgenti termo-minerali di Agnano* », (N.° 38) che trovai citato in varî luoghi: di esso però non mi fu dato rintracciare copia alcuna.

Per completare l'esame dei lavori di carattere e contenuto strettamente idraulico, debbo ora parlare dei trattati del Masoni, nei quali si rispecchiano e si fondono la sua opera di scienziato e quella sua di docente.

Fin dall'inizio del suo insegnamento, nel 1886-87 comparvero in edizione litografata, raccolte dagli alunni, le sue *Lezioni di Idraulica* (N. 10) in un volumetto di 375 pagine, nel quale, sulle linee direttive tracciate nella più sopra illustrata « *Prolusione* », è già contenuto sostanzialmente il nòcciolo fondamentale del più vasto e più perfetto trattato didattico, che vide la luce in séguito (N. 15). Questo s'intitola: « *Corso di idraulica teoretica e pratica* », e fu stampato a cura dell'editore Pellerano in Napoli, che ne fece ben cinque edizioni negli anni 1889, 1900, 1908, 1921 e 1924. Le successive edizioni non furono soltanto semplici ristampe, rese necessarie dal rapido esaurirsi delle edizioni precedenti, ma furono tutte accuratamente rivedute, ritoccate, perfezionate nella forma e notevolmente ampliate, con opportuno aggiornamento, secondo i successivi progressi della scienza e con i risultati degli studî originali e personali dell' Autore.

La ben nota, vasta risonanza che il detto « *Corso* » trovò nel mondo scientifico e didattico potrebbe far ritenere superfluo e forse inopportuno ch'io qui mi dilunghi ad illustrare il contenuto dell'opera.

Però io sento che verrei meno ai doveri tracciatimi dal mio còmpito se non dedicassi qui qualche parola per ricordarne e metterne in luce, sia pure sommariamente, i pregi singolarmente cospicui. Pregi sostanziali, scientifici e tecnici e pregi formali, espositivi e didattici.

Il più delle volte un trattato è opera destinata ad esporre cose già note e raggiunge il suo scopo semplicemente se l'esposizione è completa, organica,

ordinata, chiara. Ma il libro del Masoni ha ben altre virtù: cosa non comune in un'opera didattica, esso presenta originalità non soltanto formale. A molte questioni ed a molti capitoli il Masoni ha dato un'impostazione assolutamente nuova e personale; nel libro poi Egli ha introdotti i risultati dei Suoi studî originali, già esposti nelle dotte memorie sopra illustrate. Citerò qui solo i punti più notevoli sotto questo riguardo. Il Cap. VIII° « *Azioni reciproche fra solidi e liquidi in movimento* » presenta una impostazione ed una trattazione entrambe originalissime: il suo contenuto costituisce il nucleo fondamentale dell'altro trattato dello stesso Autore, sui *recettori idraulici*, che esaminerò più oltre.

L'originalità del capitolo ora citato fu a più riprese riconosciuta da distinti ed insigni cultori dell'idrodinamica teorica, i quali citarono l'epressione (104) a pag. 159 della 5.ª edizione, come « *formula del* Masoni ». Anzi, a questo proposito debbo ricordare che un illustre matematico, trattando lo stesso problema con i metodi del calcolo vettoriale, per l'espressione della spinta idrodinamica ritrovò alcuni termini coincidenti con quelli già trovati dal Masoni, mentre per un termine trovò un'espressione diversa. Io ebbi la ventura di poter dimostrare che questa espressione è *solo formalmente* diversa, e che opportunamente trasformata viene a coincidere con quella dimostrata dal Masoni. Ciò è oggetto di una mia nota « *Sull'azione dinamica di una corrente fluida sopra pareti rigide* ». Atti della R. Accademia dei Lincei, Roma 1915. Il Masoni si compiacque assai di questa messa a punto, e citò le pubblicazioni relative all'argomento, nella nota a pie' di pagina 182 in fine dell'VIII° capitolo della stessa citata 5.ª edizione.

Nei capitoli IX° e X° sulla foronomia e sulle bocche a stramazzo, i capitoli sui problemi delle condotte semplici e complesse, sulle condizioni di massima economia nelle condotte forzate, sul moto dei corsi d'acqua e sulla misura delle relative portate, sul deflusso attraverso ai terreni permeabili, si fanno particolarmente notare per l'inquadratura, in essi opportunamente eseguita, dei risultati originali di studî personali dell'Autore volta a volta teorici o sperimentali.

Il Masoni poi riesce a manifestare originalità di vedute, di direttive e di metodo anche ove e quando, nello svolgere il suo còmpito di trattatista, deve rielaborare ed ordinare sistematicamente nozioni già acquisite, risultati già noti, apporti dovuti a precedenti studî od esperimenti di altri scienziati. La materia scientifica e tecnica, per così dire rifusa ed affinata quasi in un crogiuolo nel capace e possente pensiero dell'Autore, acquista una nuova organica unità e brilla di una nuova luce limpida, adamantina, e conquide il lettore con una nuova suggestiva e persuasiva efficacia. Ecco l'originalità di un vero, magistrale trattatista di razza!

Come esempî di questa originale virtù in Lui così singolarmente spiccata, vorrò citare solo due tra i più notevoli, più caratteristici e più significativi:

— i capitoli sui problemi dei rigurgiti, problemi che trovano nel libro del Masoni impostazione ed inquadratura di organica, sintetica unità e di efficacia didattica ed applicativa non mai ancora raggiunte in alcuno dei precedenti trattati;

— tutto l'importante ramo dell'idraulica fluviale, in quanto, benchè per tale branca si fossero avuti notevolissimi ed insigni contributi, specialmente applicativi da parte di studiosi e di tecnici italiani, nessun trattatista aveva mai prima d'allora neppure tentata un'esposizione così ampia, completa, organicamente metodica ed efficacemente sintetica, quale quella magistralmente realizzata dal Masoni.

Nel « *Corso* » si ha la migliore prova e la più alta manifestazione di quello spirito, già sopra illustrato come caratteristico della mentalità del Masoni: ed invero nel libro, più e meglio che in ogni altra sua opera, Egli si rivela in pari grado ed in egual misura lo scienziato armato dei più acconci e potenti mezzi di rigorosa indagine, ed insieme l'ingegnere pienamente consapevole delle esigenze tecniche ed applicative della fondamentale disciplina da Lui professata: i due diversi e per certo riguardo opposti aspetti della mentalità si fusero nell'Autore in una completa e feconda armonia e ne risultò una nobilissima ed utilissima opera, davvero mirabile per il pieno e compiuto raggiungimento di tutti i suoi più alti scopi scientifici, culturali e didattici.

La ristrettezza del tempo e dello spazio mi vieta di aggiungere altro sulle virtù sostanziali ed intrinseche del libro celebrato.

Poco mi resta da dire riguardo ai pregi formali: in un'opera veramente organica sostanza e forma sono intimamente connesse, sicchè parlando dei pregi sostanziali, molte cose ho già dette riguardanti quelli formali: esporrò solo qualche rilievo generico e riassuntivo.

Nella forma essenzialmente notiamo ed ammiriamo limpidità, chiarezza, eleganza suggestiva ed allettante per il lettore, che ne viene conquiso ed invogliato a studiare: eleganza però non basata su preziosità di ricerca letteraria e stilistica, ma che invece sgorga spontaneamente e direttamente dall'esattezza e dalla limpidezza del pensiero, e dalla piena ed immediata aderenza delle espressioni alle idee ed ai fatti.

È ben noto che ogni trattato di disciplina scientifico-applicativa risulta in genere destinato a due diverse categorie di lettori, e come tale deve soddisfare ad esigenze diverse ed in certo modo contrastanti; le categorie sono: gli allievi, per i quali esso deve essere il libro di testo, per lo studio scolastico, ed i professionisti o gli studiosi già provetti, per i quali esso deve costituire compendiosa guida per ulteriori studî e sintetico *vade mecum* per le applicazioni concrete professionali.

Orbene il « *Corso* » del Masoni soddisfa mirabilmente in equilibrata misura a queste diverse e quasi opposte esigenze: in ogni problema non mancano mai quei chiarimenti propedeutici necessarî agli studenti che sul libro

devono erudirsi, dirozzarsi ed iniziarsi alla scienza per loro nuova, mentre d'altra parte la giusta, castigata sobrietà delle dilucidazioni didattiche toglie all'esposizione qualsiasi prolissità, e consente a chi già conosce la disciplina una rapida ed agevole consultazione, atta a cogliere facilmente di ogni problema una visione sintetica completa.

Per tutti questi pregi, e per altri che taccio per brevità o perchè mi siano sfuggiti, il « *Corso* » del Masoni meritatamente si conquistò una vasta celebrità nel mondo scientifico e tecnico; rapidamente divenne, (e tale restò), non solo un ottimo testo d'Idraulica della Scuola Napoletana, ma l'ottimo testo di Idraulica per eccellenza, e non in Italia soltanto.

Credo opportuno e doveroso citare i più importanti e significativi riconoscimenti tributati da trattatisti stranieri al valore dell'opera del Masoni.

Anzitutto Philipp Forchheimer nel rinomato trattato « Hydraulik » seconda edizione fatta nel 1924 a cura di Teubner a Lipsia e Berlino, e precisamente nella prefazione, così si esprime:

« Mentre la nuova letteratura (idraulica) francese possiede un manuale »
« nell' « Idraulica » del Flamant, il quale almeno tratta esaurientemente »
« le ricerche idrauliche francesi, mentre *la letteratura italiana presenta* »
« *la ottimamente riuscita « Idraulica » del* Masoni, manca finora una cor- »
« rispondente opera in lingua tedesca ».

Inoltre debbo segnalare Boris A. Bakhmeteff *Hydraulics of open Chennels*. Ed. Mc. Graw-Hill New York and London, 1932; a pag. 300 si legge:

« Eccellenti riassunti dei lavori di Boussinesq sono dati da Flamant »
« « *Hydraulique* », ultima edizione, Parigi 1923; Forchheimer « *Hydraulik* »
« 3.ª ed. Lipsia 1930; Masoni, « *Idraulica* » Napoli 1900, in italiano ».

I trattati d'Idraulica posteriori seguirono le linee direttive da esso magistralmente tracciate, ne imitarono o riportarono le impostazioni e le inquadrature dei varî problemi.

Anzi io credo di poter affermare che detto « *Corso* » resta e resterà quale insuperato esempio e modello del vero ed ideale modo, in cui deve essere concepito, impostato e redatto un trattato di una scienza tecnica ed applicativa.

Il Masoni fu in ciò davvero Maestro di Maestri.

Gli illustrati pregi del « *Corso* » sono naturalmente condivisi dalle due appendici (N.ri 23 e 27).

Della prima già ho detto più sopra, in quanto essa ha la consistenza e la figura d'una memoria o monografia, in buona parte originale.

La seconda, « *Idraulica sanitaria ed agricola* » costituisce come un trattatello a sè stante, pregevolissimo per un così importante ramo:

Il libretto di non più di 180 pagine, édito dal Pellerano nel 1895, può essere ancora oggi utilissimo ausilio ai tecnici: ma per quel tempo esso costituì in Italia il primo lavoro di sistematico ed organico coordinamento di quegli argomenti, che poi, specialmente negli anni più a noi prossimi,

dovevano prendere così vasto e decisivo sviluppo per le opere di risanamento urbano e di bonifica agraria: sicchè con questa opera di pur modesta mole il Masoni in tale importantissimo campo fu realmente e meritoriamente pioniere e precursore.

Debbo ora parlare di un ultimo trattato del Masoni: « *L'énergie hydraulique et les récepteurs hydrauliques* » édita da Gauthier-Villars a Parigi nel 1905, e scritta appositamente per costituire un volume di una « *Encyclopédie industrielle* », fondata da C. Lechalas. Il libro, di poco più di 300 pagine, fu il primo trattato sistematico sulle macchine idrauliche, ed il capostipite di tutti i successivi trattati sullo stesso argomento: tra questi esso rimase di gran lunga il più pregevole, per molti anni, fino a circa or sono due lustri, e cioè prima che nel campo delle turbine si affermassero le nuovissime teorie modellate sui recenti sviluppi dell'aerodinamica applicata.

I pregi formali ed espositivi di questo libro non sono inferiori a quelli del « *Corso* », sopra illustrati. Per il contenuto sostanziale debbo dire che nel § 4 del capitolo I°, sulle « *Azioni mutue d'una corrente liquida e di una superficie solida* », l'Autore riporta il suo originalissimo studio già consegnato nel cap. VIII° del « Corso d'Idraulica », già più sopra esaminato, e poi nei capitoli VIII° e successivi, in modo non meno originale, applica i risultati dello studio stesso al calcolo delle turbine idrauliche. Nuova ed originale è pure la sistematica classificazione delle macchine idrauliche sian ruote che turbine. Il metodo del Masoni per il calcolo di dette macchine fu poi riprodotto od imitato in tutti i successivi trattati sui detti argomenti.

È inutile aggiungere che anche questo libro ebbe larghissima, fortunata diffusione e risonanza anche all'estero, e segnò nel mondo scientifico orme non cancellabili.

In questi due libri, il « *Corso* » con le sue appendici e « *L'énergie hydraulique etc....* », come abbiamo visto, si trovano raccolti e compendiati anche i maggiori e più notevoli risultati dell'opera sua originale di scienziato e di ricercatore.

Con questa vasta produzione, così mirabilmente rielaborata e coordinata, il Masoni primeggiò nel campo dell'Idraulica scientifica ed applicativa, quale insigne ed indiscusso Maestro: tale resta tuttora e resterà in avvenire nella storia della scienza e della tecnica.

Debbo ora segnalare brevemente altri lavori del Masoni su argomenti non esclusivamente idraulici od anche di soggetti varî, estranei all'idraulica; lavori tutti compiuti dall'Autore in conseguenza della sua attiva partecipazione alla professione ed alla vita pubblica.

Il loro esame è necessario per completare il quadro della complessa e multiforme personalità dell'Autore.

In primo luogo debbo segnalare due note comparse negli Atti del nostro

R. Istituto d'Incoraggiamento nel 1902 (N.ri 36 e 37): l'una è una lettera aperta al Presidente, « *Sulla questione dell' energia idro-elettrica da trasportarsi a Napoli* »; l'altra, dal titolo « *Sulla utilizzazione delle acque pubbliche in Italia* » è il contributo dell'autore ad un gruppo di note sullo stesso suddetto argomento, al quale collaborarono altri insigni scienziati e tecnici, come Giuseppe Colombo, Luigi Lombardi e Ciro Chistoni.

In questi due lavori il Masoni mette a profitto l'alta sua competenza tecnica per discutere con profondità ed ampiezza di vedute, alcune questioni di natura economica, amministrativa ed anche legislativa sull'impiego delle acque in Italia, particolarmente per produzione di energia elettrica.

Analogamente lo stesso problema per la città di Napoli venne dal Masoni trattato, appunto sotto l'aspetto economico ed amministrativo, in un discorso (N. 41) pronunziato 15 dicembre 1904 dinanzi alla Giunta comunale di Napoli, mentre Egli era Assessore dei Lavori Pubblici: oggetto del discorso era la concessione al Municipio di Napoli della energia idro-elettrica delle sorgenti del Volturno: il discorso condusse alla deliberazione della Giunta che approvò la richiesta della detta concessione e lo Statuto dell'istituendo Ente Autonomo Volturno. La grande e benemerita Azienda idro-elettrica napoletana nacque così sotto buoni auspici: fu tenuta a battesimo dall'insigne Maestro dell'Idraulica.

Due notevoli lavori in cui l'eminente scienziato efficacemente opera in pro' della tecnica e dell'economia di importanti acquedotti comunali sono:

— una relazione al Comune di Caserta come riassunto dei lavori di una Commissione tecnica per l'alimentazione idraulica della Città di Caserta con le acque del condotto Carolino (1896 — N. 30);

— un poderoso discorso pronunziato al Consiglio Comunale di Napoli sulla questione degli Acquedotti di Napoli (1905 — N. 44): è un approfondito e conclusivo studio sull'istituzione di nuovi sifoni e nuove diramazioni degli acquedotti allora esistenti.

Altro lavoro analogo (N. 35 — 1901) espone illuminati pareri e consigli tecnici su lavori per consolidamento dei muri di sponda e per sistemazione dell'alveo del Tevere nel tratto prossimo al Ponte Cestio ed all'Isola Tiberina.

Sono indelebili tracce della sua opera di pubblico amministratore, le quali insieme costituiscono dei tuttora pregevoli contributi alla letteratura tecnica.

Degne di nota sono due poderose relazioni di Perizia (N.i 17 e 42): l'una è tutta basata su numerosissimi calcoli di portate e di ripartizioni d'acqua; nell'altra l'insigne idraulico, con la sua ben nota versatilità, si rivela profondo e provetto conoscitore della tecnica di produzione e di utilizzazione del gas illuminante.

Ultimo gruppo di lavori non idraulici comprende una nota al R. Istituto d'Incoraggiamento di Napoli, « *Sullo sviluppo dell' insegnamento tecnico*

superiore » (1903 — N. 33), e tre discorsi su vasti problemi economici ed amministrativi (N.i da 45 a 51): di tali discorsi quattro furono pronunziati alla Camera dei Deputati nel 1908.

In essi il MASONI rivela spiccate qualità di una dialettica abile, serrata, sobria, ma efficacissima.

Terminato così un sommario esame delle pubblicazioni del MASONI debbo ora dire brevemente delle qualità da Lui rivelate quale Insegnante, Direttore di Laboratorio e quale Direttore della gloriosa Scuola dell'Ingegneria Napoletana.

Nelle sue lezioni Egli era didatta, espositore efficacissimo: la sobrietà di chiarimenti propedeutici già illustrata parlando del suo « *Corso* », veniva nelle lezioni orali integrata con copiose, opportunissime dilucidazioni, sempre pienamente aderenti, caso per caso, alla mentalità ed alla precedente preparazione culturale degli alunni; ai quali poi con la parola e con l'esempio Egli sapeva trasfondere il suo vivissimo, fattivo entusiasmo per la bella e fondamentale sua disciplina. Prestava pure assidue, amorose cure alle esercitazioni numeriche, sperimentali ed applicative. Era esaminatore severo, ma sempre coscienziosamente giusto ed equilibrato.

Grandi, solerti cure prodigò sempre al suo Laboratorio, strumento essenziale delle sue ricerche sperimentali: con mezzi relativamente limitati riuscì ad incrementarne l'efficacia, dotandolo di nuovi impianti, di acconci apparecchi e mezzi di misura; — ricordo la già illustrata stazione idrometrica sul Sarno, a Scafati.

Riuscì a formare una valente Scuola di studiosi e ricercatori nel campo idraulico: citerò semplicemente i suoi allievi che riuscirono ad affermarsi brillantemente nelle ricerche e nell'insegnamento superiore dell'idraulica o di discipline affini: Eugenio GALLI, Giuseppe CAMPANELLA, Eugenio FISCHER, Girolamo IPPOLITO, Guido NEBBIA.

Nel lungo periodo ventennale in cui Egli guidò quale Direttore la nostra Scuola d'Ingegneria, la sua opera in vantaggio di essa fu sempre solerte, diuturna, avveduta, efficacissima.

L'interesse, lo sviluppo, la fortuna, il prestigio della Scuola, della sua, sotto tanti aspetti sua Scuola, stettero sempre in cima ai suoi pensieri.

Le sue qualità di eletto scienziato e di tecnico pratico e provetto lo portavano naturalmente a porre ogni cura perchè il tono, il carattere di ogni insegnamento fosse in pari misura sempre più scientificamente elevato, e sempre più conforme alle esigenze concrete e pratiche dell'ingegneria.

Per il raggiungimento di questi fini seppe a tempo opportuno mettere a profitto il suo prestigio di amministratore comunale e la sua influenza di membro del Consiglio Superiore e di Deputato.

Sperimentatore di razza e di alto rango, sempre seppe comprendere e sentire l'importanza ed i bisogni dei varî Laboratorî sperimentali, al cui incremento e sviluppo prestò assiduamente le sue sollecite cure.

Posso attestare che anche l'Istituto ed il Laboratorio di Scienza delle Costruzioni, pure prima che mi fosse dato l'onore d'essere chiamato a dirigerlo, ogni qual volta ebbe necessità di nuove macchine o nuovi impianti, trovò sempre nel Masoni un patrono amorevole, solerte ed efficacissimo: Egli con ciò forse si compiaceva nel ricordare di essere Egli stesso un valente cultore di Scienza delle Costruzioni.

L'istituzione tra noi di studî Aeronautici (a cui io ebbi la ventura di partecipare con i primi insegnamenti) trovò in Lui il primo promotore ed il più efficace assertore.

Seppe amministrare i mezzi finanziarî della Scuola, volta a volta con oculata parsimonia, realizzando notevoli economie, e tempestivamente con opportuna, equilibrata ed avveduta larghezza, sia per incrementare i Laboratorî, sia per consolidare, trasformare ed ampliare il vetusto edifizio, sede della Scuola: i locali sul nuovo fronte verso Via Mezzocannone ed il monumentale ingresso con l'ampio nuovo scalone furono eseguiti per suo impulso e sotto la sua guida.

Negli ultimi anni Egli maturava progetti per una nuova più ampia e più degna sede: quando questa — che oggi è allo stato di desiderio e di fervido augurio — potrà venir realizzata, certo il pensiero dei docenti e degli ingegneri napoletani dovrà, affettuoso e reverente, rievocare la memoria del Masoni.

Non credo che qui ed ora sia opportuno analizzare minutamente la vasta e complessa opera svolta dal Masoni quale amministratore della pubblica cosa e quale Deputato al Parlamento Nazionale: d'altra parte a me manca certo la competenza per farlo adeguatamente. Da quanto ho detto, tuttavia, già molte significative cose risultano a questo proposito.

Solo desidero — e debbo — aggiungere alcuni rilievi generali. Tutta la sua opera di uomo pubblico fu improntata al più completo disinteresse personale, ed al più vivo ed imperioso desiderio di rendersi utile a questa sua Città tanto amata, ed alla Nazione amatissima.

Egli, certamente conscio delle vaste possibilità che gli conferiva l'alta sua capacità scientifica e tecnica, sentiva in sè imperativo il dovere morale di prodigare quelle possibilità per il bene della Città e della Patria. Durante i periodi in cui resse l'amministrazione Provinciale, partecipò a quella comunale, ed ebbe analoghe cariche, durante i lunghi anni di sua presidenza del Consiglio Tecnico e della Commissione Edilizia comunale di Napoli, tutti i maggiori problemi cittadini in fatto di idraulica, edilizia, industria, pubblici servizî, tutte le maggiori iniziative in tali campi, ebbero occasione e modo di ricevere valido impulso, sicuro avviamento e compimento dal suo sapere e dalla sua amorosa sollecitudine.

La sua azione di Parlamentare non fu mai ispirata da preoccupazioni nè orientata da intenti di natura elettorale: ogni qualvolta prese la parola nell'alto Consesso, si occupò di vitali questioni riguardanti ed interessanti

la Pubblica Istruzione, l'Agricoltura, l'Industria, avendo solo di mira lo sviluppo dell'economia e del benessere del Suo Paese.

La conoscenza di tante elette qualità della mente di Udalrigo Masoni potrebbe bastare a convincere ognuno delle non meno elette qualità morali che necessariamente dovevano adornare l'animo di Lui.

Ciò è confermato dal commosso ricordo di quanti hanno la ventura di averlo conosciuto da vicino.

Egli era profondamente religioso: in un suo diario intimo Egli lasciò scritto che la sua vita fu sempre orientata ai principî altissimi della religione cattolica.

Chi lo avvicinava, scorgeva sùbito in Lui un riflesso della sua alta mentalità, nel lucido ed arguto buon senso, col quale Egli considerava le cose ed i fatti della vita comune: inoltre ben presto si notavano in Lui non dubbi segni di una grande bontà, profondamente radicata nel suo animo sensibile

Aveva rettissima coscienza: di fronte agli imperativi del dovere profondamente sentito, era rigido anche con sè stesso: perciò non ammetteva nè tollerava in altrui tergiversazioni di fronte al dovere nè compromessi con la coscienza. Ciò non ostante, la sua profonda bontà gli ispirava sempre una larga ed umana comprensione di fronte ai casi della vita, sempre varî, spesso avversi e dolorosi.

Pur non ammettendo ingiustizie, non era alieno da prestare a volte generoso, sempre benevolo e valido ausilio a chi ne fosse meritevole.

Particolarmente era largo di incoraggiamenti ed aiuti verso i giovani capaci e volenterosi, che bisognassero di impulsi per i difficili o contrastati inizî della loro carriera.

Chi meritatamente riusciva a farsi stimare da Lui, sapeva poi di poter avere in Lui un vero amico, affezionato, costante e fedele.

Dotato di largo censo, condusse tuttavia sempre vita modesta, punto mondana, tutto assorbito qual'era dal diuturno lavoro e dall'appassionato culto della scienza.

In tutte le manifestazioni della sua vita così pubblica come privata, Egli fu sempre vero e perfetto gentiluomo.

On. le Presidente, Illustri Accademici, Signori, Camerati,

Consentite ch'io esprima ancora alla Famiglia Masoni tutto il mio, il nostro costante accorato rimpianto per la tristissima dipartita. Noi tutti avremmo desiderato avere ancora per lunghi anni tra noi l'eccelsa personalità, che ci fu tolta.

Debbo pure ringraziare la Famiglia per le preziose notizie e per la fotografia, che cortesemente essa mi favorì.

Io mi lusingo di aver potuto, con le mie disadorne parole, riuscire ad assolvere non del tutto indegnamente il mio còmpito.

E riterrò di aver colto il segno, se avrò almeno in parte raggiunto il principale scopo che mi proposi e tenni di mira in questa mia modesta fatica.

Lo scopo era di fare opera in qualche modo utile e fattiva: perciò non espressione di sterile ammirazione, per quanto sentita e sincera, non infeconda, per quanto doverosa, esaltazione personale.

Gli scritti del Masoni restano nelle nostre biblioteche, non immoto monumento di un passato, ma ausilio attivo ed operante per il futuro lavoro degli studiosi a realizzare maggiori progressi della scienza e della tecnica.

Così questa rapida ed imperfetta, ma amorosa e reverente sintesi, possa valere a richiamare e lumeggiare gli aspetti meno noti e meno documentati della nobilissima vita e dell' eccelsa figura di Udalrigo Masoni, in modo che questa resti intera e completa tra noi presente e tuttora operante, fattiva e benefica, quale esempio e direi quasi vessillo, e quale incitamento, per indicare a noi e sopratutto ai giovani delle nuove fresche generazioni, la vera via da seguire con indefettibile fede per un sempre maggiore incremento, una sempre maggiore valorizzazione della scienza e della tecnica italiana.

Pubblicazioni del prof. **Udalrigo Masoni.**

1. *Sopra alcune curve del quarto ordine dotate di punti di ondulazione.* Rend. R. Acc. delle Scienze Fis. e Mat. di Napoli, 1882.
2. *Sui connessi conici ed in particolare sui sistemi di rette del 2.° ordine.* Rend. della R. Acc. delle Scienze Fis. e Mat. di Napoli, 1883.
3. *Sull' urto dei corpi e sul movimento di un corpo pesante tra due mezzi resistenti.* Rend. della R. Acc. delle Scienze Fisiche e Mat. di Napoli, marzo 1884.
4. *Sulle forze impulsive che hanno la medesima azione sopra uno stesso punto di un sistema rigido.* Rend. della R. Acc. delle Scienze Fis. e Mat. di Napoli, luglio 1884.
5. *Sulle derivate di ordine qualunque della funzione potenziale quando l' attrazione è proporzionale allo inverso della n.ma potenza della distanza.* Rend. della R. Acc. delle Sc. Fis. e Mat. di Napoli, luglio 1884.
6. *Alcune considerazioni sulla diname sollecitante e la torsione generata nel moto di un sistema rigido.* Rend. della R. Acc. delle Scienze Fis. e Mat. di Napoli, maggio 1885.
7. *Considerazioni sui solidi elastici ad asse rettilineo inflessi da un carico*

obliquo a questo asse. Atti del R. Istituto d'Incoraggiamento di Napoli, 4 giugno 1885.

8. *Alberto Castigliano ed il suo recente lavoro sulla teoria delle molle.* Bollettino del Collegio degli Ingegneri ed Architetti di Napoli del 1.° luglio 1885, N. 13.
9. *Delle sollecitazioni dinamiche nei sistemi elastici articolati.* Atti del R. Istituto d'Incoraggiamento di Napoli, 1886.
10. *Lezioni di Idraulica* (raccolte dagli alunni della R. Scuola d'Applicazione per gli Ingegneri in Napoli), 1886-1887 — Litografia « Trinacria », Napoli.
11. *Prolusione al corso di Idraulica teoretica nella R. Scuola d'Applicazione per gli Ingegneri in Napoli, letta il 20 novembre 1887.* Ed. Morano Napoli, 1887.
12. *Sullo stato attuale della teoria dell'efflusso per luci a stramazzo.* « Il Politecnico », Milano, gennaio 1888.
13. *Su di una nuova formola proposta pel calcolo della portata nelle bocche a stramazzo.* Rend. della R. Acc. delle Scienze Fis. e Mat. di Napoli, febbraio 1888.
14. *La nuova teoria delle luci a stramazzo in parete sottile e senza contrazione laterale, in rapporto alle recenti esperienze di* Bazin. Atti del R. Istituto d'Incoraggiamento di Napoli, 1889.
15. *Corso di Idraulica teoretica e pratica.* Ed. Pellerano, Napoli. Edizioni: 1.ª, 1889; 2.ª, 1900; 3.ª, 1908; 4.ª, 1921; 5.ª, 1924.
16. *Sulle condizioni di minima spesa nelle condotte forzate per distribuzione d'acqua.* Atti del R. Istituto d'Incoraggiamento di Napoli, 1891.
17. *Relazione di perizia nella causa civile tra il Prefetto della Provincia di Napoli ed i signori Bartolomeo, Vincenzo e Francesco Giannelli.* Tip. Giuseppe Valerio & C., Napoli, 1891.
18. *Di alcune ricerche sperimentali sui tubi addizionali.* Atti del R. Istituto d'Incoraggiamento di Napoli, 1892.
19. *Di alcune determinazioni di velocità e di portata sul fiume Sarno.* Boll. del Collegio degli Ingegneri ed Architetti di Napoli, luglio 1892.
20. *Sul moto dell'acqua nei tubi di condotta.* Boll. del Collegio degli Ingegneri ed Architetti di Napoli, 1893.
21. *Di un nuovo sistema di regolatore automobile della portata.* Atti del R. Istituto d'Incoraggiamento di Napoli, gennaio 1894.
22. *Sulle bocche a stramazzo rigurgitate.* Atti dell'Acc. Pontaniana di Napoli, marzo 1894.
23. *Teoria dell'efflusso a stramazzo.* 1.ª Appendice al *Corso* predetto: Pellerano, Napoli, 1894.
24. *Di alcuni esperimenti sul fiume Sarno eseguiti al partitore di Scafati.* Boll. del Collegio degli Ingegneri ed Architetti di Napoli, giugno 1894.

25. *Commemorazione del Prof.* Achille Sannia. Atti Accad. Pontaniana di Napoli, 1894.
26. *Sul moto dell'acqua attraverso i terreni permeabili.* Atti dell'Acc. Pontaniana di Napoli, 1895.
27. *Idraulica sanitaria e agricola.* 2.ª Appendice al *Corso* predetto: Pellerano, Napoli, 1895.
28. *Di alcune determinazioni sperimentali sui coefficienti di filtrazione.* Atti dell'Accademia Pontaniana, giugno 1896.
29. *Nuovo molino idraulico ad alta macinazione in Telese.* Boll. del Collegio degli Ingegneri ed Architetti in Napoli, agosto 1896.
30. *Commissione tecnica per l'alimentazione idraulica della Città di Caserta con le acque del condotto Carolino.* (Relazione) Tip. Angelo Trani, Napoli, novembre 1896.
31. *Sulla espressione approssimata del coefficiente di attrito interno nei tubi di condotta.* Atti del R. Istituto d'Incoraggiamento di Napoli, luglio 1897.
32. *Alcune osservazioni sui valori della quantità di moto e della forza viva di una corrente in una tubulatura.* Atti del R. Istituto d'Incoraggiamento di Napoli, 1898.
33. *Sullo sviluppo dell'insegnamento tecnico superiore.* Atti del R. Istituto d'Incoraggiamento di Napoli, 1900.
34. *Di alcune recenti esperienze sui grandi sifoni da Cancello a Napoli nell'acquedotto di Serino.* Boll. del Collegio degli Ingegneri ed Architetti in Napoli, aprile 1901.
35. *Sulla questione del Tevere* (*Lettera aperta a S. E. il conte Girolamo Giusso, Ministro dei Lavori Pubblici*). Boll. del Collegio degli Ingegneri ed Architetti in Napoli, settembre 1901.
36. *Sulla utilizzazione delle acque pubbliche in Italia.* Atti del R. Istituto d'Incoraggiamento di Napoli, 19 settembre 1902.
37. *Sulla quistione della energia idro-elettrica da trasportarsi a Napoli.* Atti del R. Istituto d'Incoraggiamento di Napoli, 23 agosto 1902, (lettera aperta al Presidente).
38. *Relazione sulle sorgenti termo-minerali di Agnano.* Napoli, 1902.
39. *Sul contatore d'acqua « tubo* Venturi ». Atti del R. Istituto d'Incoraggiamento di Napoli, 1903.
40. *Una visita alla stazione manometrica dei Regi Lagni sui grandi sifoni di Cancello nell'acquedotto di Serino.* Boll. del Collegio degli Ingegneri ed Architetti in Napoli, 1903.
41. *Concessione al Municipio di Napoli della energia idroelettrica delle sorgenti del Volturno.* Discorso al Consiglio comunale il 15 dicembre 1904. Tip. Morano, Napoli.
42. *Difesa del Consorzio dei comuni vesuviani, contro la Compagnia meridionale del gas.* Rilievi peritali. Napoli, 1904.

43. *L'énergie hydraulique et les récepteurs hydrauliques.* Edit. Gauthier-Villars, Paris, 1905.
44. *Sulla quistione degli acquedotti di Napoli.* Discorso pronunziato nel Consiglio Comunale: estratto dal verbale del 30 giugno 1905. Ed. Di Gennaro & Morano, Napoli.
45. *Sul problema amministrativo di Napoli.* Discorso all'Associazione monarchica liberale, 3 marzo 1907. Ed. Rivista « Rassegna Italiana », 1907.
46. *Sul bilancio di agricoltura, industria e commercio.* Discorso pronunziato alla Camera dei Deputati il 7 marzo 1908.
47. *Sul bilancio dell' Istruzione Pubblica.* Discorso pronunziato alla Camera dei Deputati il 22 maggio 1908.
48. *Sull' ordinamento dell' istruzione tecnica superiore in Italia.* Discorso alla Camera dei Deputati, 1908.
49. *Sul riordinamento dei servizî idraulici.* Discorso alla Camera dei Deputati, 1908.
50. *Sulla convenzione del Volturno.* Discorso al Consiglio comunale di Napoli, 1908.
51. *Sulla convenzione tranviaria.* Discorso al Consiglio comunale di Napoli, 1909.

Sulle sabbie ferrifere campane

Nota del prof. **Antonio Parascandola**, *presentata dal socio* **E. Quercigh**

(Adunanza del dì 2 febbraio 1939 - XVII)

Questa Nota verrà inserita in un prossimo fascicolo.

L'attività vulcanica nella regione flegrea nei riguardi del suo possibile sfruttamento

Nota del prof. **Antonio Parascandola**, *presentata dal socio* **E. Quercigh**

(Adunanza del dì 2 febbraio 1939 - XVII)

Questa Nota verrà inserita in un prossimo fascicolo.

Variabili mutuamente casuali e « sfioccamento » statistico

Nota del socio corrispondente Prof. **Giulio Andreoli**

(Adunanza del dì 7 giugno 1939 - XVII)

Sunto. — Una fondamentale quistione statistica (inerente ad es. al calcolo dell'incremento demografico o alla costruzione delle tavole di mortalità) viene presa in esame; essa risulta collegata ad un concetto nuovo del calcolo delle probabilità, quello delle variabili mutuamente casuali.

1. In alcune ricerche di carattere demografico, riguardanti l'intervallo protogenesico e le relazioni fra fecondità e fecondabilità media in una popolazione, il prof. G. De Meo ha dovuto porsi il problema appresso enunciato e che è connesso all'eventuale presenza di fattori stagionali nella nuzialità e nella fecondabilità ed all'isolamento di tali fattori.

Ad un certo tempo si forma, per matrimonio, un certo gruppo di coppie; il gruppo è sufficientemente rappresentativo (per età e condizioni sociali) della collettività di matrimoni — individui di II ordine — sorgente in seno alla collettività in esame, formata da individui di I ordine.

I nati di queste coppie si « *sfioccano* » nel tempo a partire da 9 mesi in poi; e si ha una certa curva di frequenza che dà questo « *sfioccamento* » di nascite per matrimoni contemporanei.

Tale curva, statisticamente ed in media, rappresenta anche quella di probabilità affinchè un matrimonio generico celebrato al tempo T_0 dia una nascita al tempo T_1 ($T_1 \geq T_0 + 9$ mesi, ad esempio).

Supponiamo, sempre da un punto di vista medio e statistico, che nulla vari; che quindi la popolazione della collettività, la sua composizione, la frequenza o probabilità di matrimonio, la probabilità di essere questo fecondo etc. etc. sieno costanti nel tempo. E quindi, già escludiamo fatti di stagionalità sia con l'ipotesi che non esistano, sia con l'altra ipotesi che sieno trascurabili, sia infine con l'altra ancora che un'opportuna perequazione a 12 mesi abbia soppresso le onde stagionali e mensili.

Orbene, reciprocamente a quella prima curva di « *sfioccamento* » nel futuro, se ne affianca una di « *sfioccamento* » nel passato: consideriamo cioè tutte le nascite in un certo tempo T_1; è chiaro che a lor volta esse derivano da matrimoni celebrati a varî tempi T_0 e che vi è quindi una curva di frequenza — o di probabilità se si vuole — che dà lo « *sfioccamento* » dei matrimoni per nascite contemporanee.

Le variabili T_0 e T_1 formano *per ovvia* estensione quella che ho [1]) chiamato « *coppia di variabili mutuamente casuali* ».

Di fatto risulta che, nei periodi e per le collettività presi in esame le due curve *coincidono praticamente*; mentre a priori è evidente che ciò — in generale — non avviene. Si possono presentare (come abbiamo già visto nel lavoro citato per altri fenomeni) apparenti variazioni ed apparenti periodicità. Ed allora sorge l'altro problema, di statistica metodologica, al quale è dedicata la presente nota.

Determinare la legge che lega due istanti di tempo, che siano mutuamente variabili casuali; del quale il primo istante è quello della causa, il secondo dell'effetto di un fenomeno (la durata dell'intervallo causa-effetto si suppone retta sempre della stessa legge casuale) verificantisi in una collettività soggetta a rinnovamento. In altre parole:

I. Nella collettività K soggetta a rinnovamento *con legge nota* si verificano certi eventi C, secondo una ben definita legge (invariabile nel tempo, almeno in un primo esame).

II. Agli eventi C, come cause, seguono altri eventi E, come effetti: ad ogni evento C un evento E.

III. È nota (ed è anch'essa supposta invariabile in un primo esame) la legge di probabilità nel tempo del verificarsi un evento E, susseguente ad un evento C.

IV. Si cercano

α) la legge di « *sfioccamento* » nel tempo, degli eventi E dovuti agli eventi C, verificatisi in un certo istante,

β) la legge di « *sfioccamento* », nel tempo, di tutti gli eventi C che hanno prodotto in un certo istante, tutti gli E verificatisi allora.

Come abbiamo detto, sono presupposte note:

a) la legge di variazione della collettività K, nel tempo,

b) la legge $\wedge$ di probabilità dell'intervallo C-E, supposta invariabile nel tempo.

È quasi immediato che se la collettività K non varia nel tempo nè come composizione, nè come numero, nè in essa varia nel tempo la frequenza della causa C, le due leggi di sfioccamento di E rispetto a C e di C rispetto ad E coincidono precisamente ambedue con $\wedge$, *salvo il verso*.

2. Esaminiamo dunque il modo col quale si legano questi due sfioccamenti, limitandoci al caso discontinuo: il passaggio al continuo non offre difficoltà.

La collettività K sia tale che l'evento C abbia, in un intervallo di tempo h_n la probabilità α *fissa* di verificarsi — e che consecutivamente al

---

[1]) Andreoli G., *Coppie di variabili mutuamente casuali etc.* Rend. R. Acc. Sc. Serie 4.ª vol. VI 1936 - XIV, Napoli.

verificarsi di C, nel successivo intervallo di tempo h si verifichi l'evento E con probabilità p_1, nell'ulteriore, secondo intervallo h con probabilità p_2, ... e così via sino a p_n [1]). Sia messo ora a regime il fenomeno, e nell'intervallo r-esimo si verifichino γ eventi C, e dagli intervalli precedenti con i rispettivi eventi C in ciascuno, sono prodotti rispettivamente $p_1\gamma$, $p_2\gamma$, $p_3\gamma$ ... $p_n\gamma$ avvenimenti E.

Di conseguenza, in un qualunque intervallo s-esimo si producono $p_1\gamma$ eventi che provengono da cause nell'intervallo $(s-1)$esimo; $p_2\gamma$ eventi da cause dell'intervallo $(s-2)$esimo, $p_n\gamma$ eventi da cause dell'intervallo $(s-n)$esimo.

Dunque in tutto sono *sempre* γ eventi, con la legge di probabilità (retrospettiva nel tempo) data da $p_1, p_2 \ldots p_n$ e quindi dalla stessa legge delle cause.

Lo schema è il seguente:

			Effetti verificatesi nell'intervallo							
intervallo di tempo	cause verificatesi		r—n	(r+1)esimo	$(r+2)^{mo}$	$(r+3)^{mo}$	...	$(r+n)^{mo}$	$(r+n+1)^{mo}$	...
.....	.....		....	.....						
r-simo	γ		0	$p_1\gamma$	$p_2\gamma$	$p_3\gamma$	...	$p_n\gamma$	0	...
$(r+1)$simo	γ		0	0	$p_1\gamma$	$p_2\gamma$	...	$p_{n-1}\gamma$	$p_n\gamma$	...
$(r+2)$simo	γ		0	0	0	$p_1\gamma$	...	$p_{n-2}\gamma$	$p_{n-1}\gamma$	...

Qui la legge presupposta nella condiz. 1 è quella di invariabilità della collettività K e del passaggio da K a C.

3. Supponiamo ora che il passaggio da K a C avvenga ancora con legge costante ma che varî il numero dei componenti di K, secondo una legge geometrica (ed è questo il caso effettivo — entro limiti non eccessivamente larghi di tempo — della popolazione e del fenomeno matrimonio-primogenito). Sia q la ragione dell'incremento. Allora il quadro risulta ovviamente modificato in

[1]) $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$.

E

	C		r^{mo}	$(r+1)^{mo}$	$(r+2)^{mo}$			
. . . . .	. . . . .		. . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .		. . . . .
r^{mo}	$q^r\gamma$		0	$p_1 q^r\gamma$	$p_2 q^r\gamma$	$p_3 q^r\gamma$		C_r
$(r+1)^{mo}$	$q^{r+1}\gamma$		0	0	$p_1 q^{r+1}\gamma$	$p_2 q^{r+1}\gamma$		C_{r+1}
$(r+2)^{mo}$	$q^{r+2}\gamma$		0	0	0	$p_1 q^{r+2}\gamma$		C_{r+2}
. . . . .	. . . . .		. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .		. . . . .
. . . . .	. . . . .		. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . .	. . . . .
			E_r	E_{r+1}	E_{r+2}	E_{r+3}		

Sicchè risulta al tempo r-esimo una $C_r = q^r\gamma = (p_1 + p_2 + \ldots + p_r)q^r\gamma$; simultaneamente risulta al tempo r-esimo, una totalità $E_r = p_1 q^{r-1}\gamma + p_2 q^{r-2}\gamma + \ldots + p_n q^{r-n}\gamma$, in quanto essi derivano da cause dell'intervallo precedente, antiprecedente etc.

Pertanto lo « *sfioccamento* » delle cause, per effetti verificati simultaneamente nell'intervallo r-simo, è dato da $\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_n$ riferite agli intervalli precedenti, legge di sfioccamento costante ed invariabile nel tempo (cioè non dipendente da r), in quanto

$$\pi_1 = \frac{p_1 q^{r-1}\gamma}{E_r} \quad ; \quad \pi_2 = \frac{p_2 q^{r-2}\gamma}{E_r} \quad ; \quad \pi_n = \frac{p_n q^{r-n}\gamma}{E_r}$$

ovvero ancora

$$\pi_1 = \frac{p_1}{q} \frac{1}{\left(\frac{p_1}{q} + \frac{p_2}{q^2} + \frac{p_3}{q^3} + \ldots + \frac{p_n}{q^n}\right)}$$

$$\pi_2 = \frac{p_2}{q^2} \frac{1}{\left(\frac{p_1}{q} + \frac{p_2}{q^2} + \ldots + \frac{p_n}{q^n}\right)}$$

. . . . . .

$$\pi_s = \frac{p_s}{q^s} \frac{1}{\left(\frac{p_1}{q} + \frac{p_2}{q^2} + \ldots + \frac{p_n}{q^n}\right)} .$$

Questo spiega il fatto verificatosi effettivamente nelle ricerche sulla popolazione allorchè si confronta la legge di sfioccamento delle nascite causate da' matrimoni contemporanei con quella dei matrimoni causanti nascite contemporanee.

Infatti q è molto prossimo all'unità; pertanto tenuto presente che $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$, avremo:

$$\frac{\pi_s}{p_s} = \frac{1}{q^s}\left(\frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}{\frac{p_1}{q} + \frac{p_2}{q^2} + \ldots + \frac{p_n}{q^n}}\right).$$

Le p — nel caso ora detto — decrescono in generale al crescere dell'indice: comunque sono positive. Per note proprietà delle medie l'espressione

$$\frac{p_1 \frac{1}{q} + p_2 \frac{1}{q^2} + \ldots + p_n \frac{1}{q^n}}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}$$

sarà un certo valore intermedio fra il minore ed il maggiore dei q^{-r}; quindi un certo valore *fisso* (assegnate le p e la q) $q^{-\rho}$.

Dunque risulta

$$\frac{\pi^s}{p_s} = q^{\rho - s}$$

e

$$\pi_s = p_s q^{\rho - s};$$

sicchè di conseguenza un certo valore centrale delle π coincide *sensibilmente* con quello delle p; e poi a destra ed a sinistra si conservano rispettivamente maggiori e minori. *Quanto più q è prossimo all'unità e quanto più rapidamente decrescono le p, tanto più vicine sono le due curve di sfioccamento:*

Se q è tanto prossimo all'unità da poter porre $\frac{1}{q} = 1 - \varepsilon$ ($\varepsilon \gtrless 0$ secondo che $q \gtrless 1$) e da trascurare $\varepsilon^2, \varepsilon^3, \ldots$, allora la formula diventa

$$\frac{\pi_s}{p_s} \sim \frac{(p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n) \cdot (1 - s\varepsilon)}{p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n - (p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \ldots + np_n)\varepsilon} \sim$$

$$\sim \frac{1 - s\varepsilon}{1 - P\varepsilon} \sim (1 - s\varepsilon)(1 + P\varepsilon) \sim 1 + (P - s)\varepsilon$$

ove

$$P = p_1 + 2p_2 + \ldots + np_n = 1 + (p_2 + 3p_3 + \ldots + (n-1)p_n)\,\pi_s = p_s + (P-s)\,p_s$$

riconfermando quanto precede. È chiaro che lo stesso effetto si presenta se variano simultaneamente la popolazione e la frequenza di C, in modo da dare quella legge geometrica.

4. Supponiamo ancora che il passaggio da K a C avvenga ancora con legge costante, ma che K varii periodicamente con un certo ritmo.

Questo significa che, rispetto alla suddivisione scelta nel tempo, la collettività K abbia successivamente il numero di elementi

$$a_1, a_2, \ldots, a_r \;;\; a_1, a_2, \ldots, a_r ; \ldots \qquad (a_{v+r} = a_v)$$

pur conservando la stessa frequenza rispetto al prodursi delle cause C.

Le linee di quel quadro saranno allora:

Casi E

Tempo	Casi C	⋮	$(v+1)^{mo}$	$(v+2)^{mo}$	$(v+3)^{mo}$	. . .	$(v+n)^{mo}$		. . .
v^{mo}	$a_v\,\Upsilon$	⋯⋯	$p_1 a_v\,\Upsilon$	$p_2 a_v\,\Upsilon$	$p_3 a_v\,\Upsilon$	. . .	$p_n a_v\,\Upsilon$	0	. . .
$(v+1)^{mo}$	$a_{v+1}\,\Upsilon$	⋯⋯	0	$p_1 a_{v+1}\,\Upsilon$	$p_2 a_{v+1}\,\Upsilon$	. . .	$p_{n-1} a_{v+1}\,\Upsilon$	$p_n a_{v+1}\,\Upsilon$	. . .
. . . . .	. . . .	. . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . .	. . . . .	. . . . .	. . .

Si osserva che, anche nelle colonne verticali, si ha una periodicità ogni r-colonne; *e la curva di sfioccamento delle C rispetto alle E, risulta ora variabile nel tempo e riproducentesi proprio con periodo r.*

Infatti al tempo v-esimo si hanno i valori

$$\pi_1^{(v)} = \frac{p_1 a_v}{p_1 a_v + p_2 a_{v-1} + \ldots + p_n a_{v-n+1}} ; \qquad \pi_2^{(v)} = \frac{p_2 a_{v-1}}{p_1 a_v + p_2 a_{v-1} + \ldots + p_n a_{v-n+1}}, \ldots$$

al tempo $(v+1)$esimo si hanno invece i valori

$$\pi_2^{(v+1)} = \frac{p_1 a_{v+1}}{p_1 a_{v+1} + p_2 a_v + \ldots + p_n a_{v-n}}; \quad \pi_2^{(v+1)} = \frac{p_2 a_v}{p_1 a_{v+1} + p_2 a_v + \ldots + p_n a_{v-n}}; \ldots$$

e così via.

In altri termini: *se si esamina lo svolgimento del fenomeno risalendo dagli effetti alle cause appare una variazione periodica della legge di sfioccamento* (legge verso il passato), *dovuta unicamente invece alle variazioni numeriche periodiche della collettività in esame.*

È sin troppo evidente che anche qui lo stesso effetto si ritrova se variando comunque la popolazione e la frequenza della causa C in modo però che i casi che si presentano seguano quella legge.

Senza fare calcoli, ma come ovvia conseguenza dei due casi trattati ora, si vede che analogamente ad essi, se la collettività K varia con legge periodica-ampliata o periodico-smorzata, cioè come

$$\ldots, a_1, q\,a_2, \ldots q^{r-1}a_r, q^r a_1, q^{r+1}a_2, \ldots q^{2r-1}a_r, q^{2r}a_1, \ldots;$$

allora la legge di sfioccamento verso il futuro resta sempre invariabile; invece quella verso il passato, varia completamente, presentando un andamento che risulta anch'esso periodico; nel senso che la legge si riproduce solo dopo ogni r intervalli di tempo; e naturalmente risulta diversa da quella di sfioccamento nel futuro, e diversa ancora in due intervalli consecutivi.

5. Si possono ora esaminare — rispetto alla frequenza delle cause C e degli effetti E, due collettività $\{K'\}$ e $\{K''\}$ oltre quella totale $\{K\} \equiv \{K'\} + \{K'\}$ data dall'averle unite. Supponiamo però che tale fatto *non* modifichi le frequenze rispettive.

Se in un certo istante si producono in $\{K'\}$, γ' cause C, e queste in $\{K'\}$ hanno la legge invariabile di sfioccamento nella produzione di E espressa dalle p'; se nello stesso istante in K'' si producono γ'' cause C e queste hanno l'altra legge di sfioccamento espressa dalle p'', nella collettività $\{K\}$ in quell'istante si presentano $\gamma' + \gamma''$ cause C le quali si sfioccano nel produrre E secondo la legge

$$\frac{p_1'\gamma' + p_1''\gamma''}{\gamma' + \gamma''} \quad , \quad \frac{p_2'\gamma' + p_2''\gamma''}{\gamma' + \gamma''}, \ldots$$

data cioè da:

$$p'\theta' + p_r''\theta'' = p_r \qquad \theta' = \frac{\gamma'}{\gamma' + \gamma''} \quad , \quad \theta'' = \frac{\gamma''}{\gamma' + \gamma_i'},$$

che in sostanza dà l'applicazione delle notissime leggi di probabilità essendo le θ', θ'' anch'esse probabilità.

Nella collettività risultante appare quindi una legge di sfioccamento che è media fra le due originarie, ciascuna ponderata secondo gli elementi cui si applica.

Nel caso di K' e K'' invariabili come numero di elementi, le due leggi di sfioccamento di K risultano eguali e dedotte nel modo ora indicato.

Nel caso di K', K'' variabili ambedue con legge geometrica risultano variate ambedue le leggi di sfioccamento e non più *invariabili* (nessuna delle due) nel tempo.

Quella verso il futuro tende ad avvicinarsi a quella effettiva di sfioccamento della collettività ad incremento più rapido (o a decremento meno rapido); quelle verso il passato, diversa dalla precedente, tende anch'essa ad avvicinarsi a quella verso il passato della collettività ad incremento meno rapido (o a decremento più rapido).

Se infine sia $\{K'\}$ che $\{K''\}$ variano periodicamente nel tempo, si presenta una variazione di ambo le leggi, periodiche anche esse, diversa se riferita al futuro od al passato, ed avente come periodo il minimo multiplo comune dei due periodi relativi a $\{K'\}, \{K''\}$.

E così via.

Conclusioni

Le conclusioni che si possono trarre da questo rapido esame sono semplicissime ma importanti.

Occorre riesaminare volta a volta tutti i problemi fondamentali metodologici.

La formazione di indici e di medie, come è noto, non dà che una prima idea del fenomeno in esame; talvolta — come dall'esame eseguito — fenomeni che si svolgono in base a leggi fisse ed invariabili possono apparire variabili; e reciprocamente.

Inoltre (e questo importa le applicazioni) ogni qualvolta si seguono fenomeni di sfioccamento non è indifferente il « verso » del tempo; lo sfioccamento delle cause per effetti contemporanei e quello degli effetti per cause contemporanee sono diversi e possono apparire non costanti.

Problemi che sorgono in immediata estensione di quelli ora indicati sono i seguenti.

I) Passaggio al continuo negli schemi precedenti: si esegue molto facilmente e su esso ritorneremo altrove.

II) Esame di sfioccamento dovuto non più al legame « causa-effetto » ma al legame di correlazione; cioè un fenomeno A insorge *sempre* che insorge un fenomeno B, e reciprocamente; però la loro successione nel tempo *non* è fissata.

Allora ad ogni collezione di fenomeni A si associano sfioccandosi con legge di probabilità verso il passato e verso il futuro, dei fenomeni B e reciprocamente.

Siamo tipicamente in presenza della coppia di variabili mutuamente casuali costituita dai tempi nei quali si verificano gli avvenimenti A, B.

Lo schema di sviluppo resta quasi inalterato, ma anche questo sarà ripreso a suo tempo in altra sede.

III) Esame e depurazione di fenomeni di sfioccamento a carattere ciclico e « riporto » di essi nel periodo fondamentale.

Commemorazione del socio **Nicola Parravano**

letta dal socio ord. **F. Giordani** *nell'adunanza del dì 1.° dicembre 1938 - XVII*

Questa commemorazione verrà inserita in un prossimo fascicolo.

Deviazioni apparenti della verticale all'Osservatorio Vesuviano

Nota del prof. **Giuseppe Imbò,** *presentata dal socio* **A. Carrelli**

(Adunanza del dì 4 maggio 1939 - XVII)

Questa Nota verrà inserita in un prossimo fascicolo.

Notizie di alcuni gruppi di esperimenti di carattere autarchico su materiali da costruzione, e su macchine di prova.

Nota del Socio ordinario **C. L. Ricci**

(Adunanza del dì 2 febbraio 1939 - XVII).

Sunto. — Si dànno notizie sintetiche ed informative su diversi ordini di esperimenti di carattere prevalentemente autarchico eseguiti nel Laboratorio sperimentale dell' Istituto di Scienza delle Costruzioni diretto dall'Autore, nella Facoltà d'Ingegneria della R. Università di Napoli.

Detti esperimenti riguardano:

A. — Speciali ferri per cemento armato, costituito da due tondini attorcigliati (ferri *Isteg*); verificato l' aumento di resistenza statica delle travi di calcestruzzo armato con detti ferri, rispetto a quelle armate con ferri normali di pari sezione, si trovó sperimentalmente:

— che tale aumento è dovuto esclusivamente all'incrudimento meccanico;

— che armando travi di calcestruzzo con tondini incruditi per trazione o torsione si realizza un aumento di resistenza notevolmente superiore a quello realizzato con i ferri *Isteg*;

— che lo stesso ferro *Isteg* presenta a trazione un modulo di elasticità complessivo od apparente molto minore del modulo di elasticità elementare del materiale originario, e questa proprietà diminuisce proporzionalmente l' efficacia del ferro *Isteg* quale armatura delle strutture cementizie.

B. — Travi di calcestruzzo armate con tondini incruditi, sperimentate a sollecitazioni dinamiche, per urto, in confronto di uguali travi armate con tondini normali: il risultato degli esperimenti è a favore dell'uso dei tondini normali.

C. — Proprietà meccaniche di calcestruzzi cementizî preparati con pietrischi locali e con varie assegnate dosature: i risultati sono oggetto di una apposita pubblicazione in corso di stampa.

D. — Comportamento alle sollecitazioni dinamiche dei ferri incruditi meccanicamente; variazione che le proprietà elastiche e resistenti dei detti ferri subiscono per effetto di urti ripetuti rapidissimi in numero assegnato: confronto con l'analogo comportamento dei ferri normali originarî.

E. — Travi di calcestruzzo cementizio armate con canne di bambù: proprietà elastiche e resistenti del bambù d'armatura; si è riscontrata nelle travi una resistenza sensibilmente superiore a quella ricavata dal calcolo in base alle proprietà elementari dei materiali costituenti. — Sono in preparazione analoghi esperimenti a lunga scadenza per saggiare la durata di armature di bambù trattate con gli usuali metodi d'immunizzazione del legno.

F. — Taratura del dinamometro a pendolo della macchina universale *Amsler* da 50 tonn. esistente nel suddetto Laboratorio: determinazione sperimentale di appositi contrappesi per il dinamometro, in modo da ottenere per la detta macchina due nuove *scale* per sforzi massimi di 2000 Kg. e 1000 Kg. rispettivamente con ottima sensibilità anche per sforzi molto piccoli.

In questo breve lavoro riferisco schematiche e sintetiche notizie su alcuni ordini di studî sperimentali di intenti e d'interesse autarchici, eseguiti per mia iniziativa nel Laboratorio per lo studio dei materiali da costruzione, annesso all'Istituto di Scienza delle Costruzioni che ho l'onore dirigere, nella facoltà d'Ingegneria nella nostra R. Università.

I primi cinque paragrafi riguardano prove su materiali, nell'ultimo riferisco esperimenti che permisero di aumentare la sensibilità di una macchina universale esistente nel predetto Laboratorio.

A. — *Esperimenti sui ferri « Isteg », speciali per cemento armato.*

Debbo richiamare una cosa nota e cioè che il ferro « *Isteg* » (prodotto secondo analogo brevetto, da una nota Ditta industriale austriaca) è costituito di due tondini cilindrici, accostati ed attorcigliati ad elica, a freddo, in modo che durante l'attorcigliamento le estremità sono vincolate a conservare inalterata la loro distanza: con ciò si provocano nel materiale notevoli deformazioni permanenti con conseguente spiccato incrudimento.

Gli esperimenti eseguiti sistematicamente nel su citato Laboratorio dimostrarono quanto segue:

a) le travi di calcestruzzo cementizio armate con ferri « *Isteg* » hanno una resistenza a rottura per flessione statica che « caeteris paribus » è apprezzabilmente superiore (circa del 10,4 %) a quella di simili travi armate con ferri ordinarî normali di pari sezione; (con ciò si è verificata e confermata la proprietà già documentata e vantata dalla Ditta « *Isteg* »);

b) un aumento di resistenza statica anche maggiore (aumento del 52,1 % circa) si ottiene armando simili travi con ferri tondi aventi pari sezione, ordinarî, ma preventivamente incruditi con l'attribuire loro delle dilatazioni permanenti (o per sola trazione, o per trazione e torsione) pari a quella che i tondini originarî dei ferri « *Isteg* » subiscono durante la fase meccanica di lavorazione a freddo nel processo di loro fabbricazione;

c) il ferro « *Isteg* » nella prova elementare di elasticità per trazione presenta un modulo di elasticità complessivo od apparente notevolmente minore (del 28,5 % circa) di quello del ferro originario: questo fatto si spiega agevolmente come conseguenza dell'attorcigliamento, in virtù del quale il ferro complessivamente presenta un comportamento analogo a quello di una fune metallica ed anche a quello di una coppia di molle ad elica (a grande passo, e perciò con i tondi sollecitati prevalentemente a flessione); questa diminuzione del modulo di elasticità costituisce una qua-

lità negativa (notevole difetto) dal ferro « *Isteg* », in quanto essa fa sì che a parità di sezione il ferro stesso *si carica di meno* di quello normale, e perciò la sua *sezione utile* si deve ritenere ridotta nello stesso rapporto; ciò spiega appunto il risultato sperimentale riferito in *b*) della maggior resistenza ottenuta con le travi armate con ferro incrudito, ma *non attorcigliato*, rispetto a quelle armate con il ferro « *Isteg* », che è incrudito perchè attorcigliato.

Resta così dimostrato all'evidenza che l'aumento di resistenza statica conferito dal ferro « *Isteg* » alle travi di calcestruzzo con esso armate è essenzialmente ed esclusivamente dovuto all'incrudimento del materiale, e non alla speciale forma delle sbarre d'armatura; restando poi assodato al passivo dello stesso ferro « *Isteg* » la dannosa diminuzione del suo modulo di elasticità complessivo od apparente, rispetto a quello del ferro originario normale.

Questi risultati,— resi noti quando alcuni gruppi industriali italiani svolgevano pratiche per acquisto di grosse partite del detto ferro, o per acquisto di licenze di fabbricazione e di relativo macchinario, — valsero ad interrompere le stesse pratiche, e fu così evitato un cospicuo esodo all'estero di valuta nazionale. Con ciò gli studî sopra riferiti recarono un modesto, ma apprezzabile contributo all' autarchia nazionale.

B. — *Comportamento dinamico di travi di calcestruzzo cementizio armate con ferri incruditi meccanicamente.*

Dai risultati sopra riferiti sorse l'opportunità di investigare il comportamento che sotto sollecitazioni dinamiche o per urto presentano travi di calcestruzzo cementizio armate con tondini incruditi. A tale scopo nel detto Laboratorio si istituirono appositi esperimenti: si costruì all' uopo un maglio capace di comunicare per urto ad una trave sperimentale un'energia massima di circa 120 Kgm.

Furono approntate diverse travi identiche a quelle degli esperimenti precedenti, armate alcune con tondini ordinarî ed altre con analoghi tondini preventivamente incruditi come sopra.

Si sottoposero le travi delle due categorie ad analoghe serie di colpi mediante il detto maglio, sollecitandole a flessione, e si misurò l' energia che ogni trave assorbiva prima di sfasciarsi.

Si riscontrò una netta e notevole superiorità (in media di circa il 15 %) a favore delle travi armate con tondini ordinarî in confronto di quelle armate con tondini incruditi, sicchè risultò capovolta la situazione vigente per le sollecitazioni statiche.

Però l'incremento percentuale di resistenza dinamica trovata a favore delle travi con tondini ordinarî è sensibilmente minore di quello relativo alla resistenza statica sopra riscontrata a favore delle travi con tondini incruditi.

Resta così posto il quesito se tecnicamente sia o no vantaggioso — ed

in quali casi od in quale misura—approfittare della maggiore resistenza statica offerta dalle travi armate con tondini incruditi, accettando e tollerando in pari tempo la loro diminuità capacità di assorbire lavoro per urto e di sopportare sollecitazioni dinamiche.

Il quesito ha evidentemente notevole importanza, oltre che strettamente tecnica, anche economica e quindi autarchica.

C. — *Comportamento alle sollecitazioni dinamiche dei ferri incruditi meccanicamente.*

Al fine di recare un contributo all'investigazione ed alla soluzione del quesito ora posto, nel detto Laboratorio si stanno approntando appositi esperimenti per studiare l'influenza dell'incrudimento meccanico sulle proprietà elementari dei ferri omogenei ed acciaiosi da cemento armato, per ciò che riguarda il comportamento alle sollecitazioni dinamiche e per urto; si preparano numerose serie di provini, opportunamente trattati, i quali verranno poi sottoposti a prove di rottura per urto col maglio a pendolo (resilienza), nonchè a prove ad urti ripetuti più o meno rapidi, od a vibrazioni prolungate, con opportuni apparecchi esistenti nel detto Laboratorio, determinando il numero delle ripetizioni di urti necessario a produrne la rottura, ed anche le diminuzioni di resistenza statica e di resilienza, e le variazioni delle costanti elestiche dopo un determiuato (assegnato) numero di ripetizioni.

Questi studî non potranno mancare di portare utile lume e guida per la soluzione del problema proposto.

D. — *Proprietà meccaniche di calcestruzzi cementizî con pietrischi locali, e con varie assegnate dosature.*

Un altro ordine di studî sperimentali ormai compiuto è costituito da una numerosissima serie di prove di resistenza su provini di calcestruzzo cementizio ottenuto con svariate dosature assegnate, usando ghiaia e pietrisco di ferrùggine vesuviana e di lapillo, pure con diverse e ben determinate composizioni granulometriche. I risultati sono raccolti ed ordinati in tabelle, e discussi mediante appositi diagrammi spaziali, che permettono di scorgere facilmente come la resistenza sia, a parità di altre condizioni, influenzata dalla composizione granulometrica, e di determinare di quest'ultima il valore ottimo in ogni singolo caso.

I risultati sono raccolti in una relazione che è in corso di stampa negli *Atti* della *Fondazione Politecnica del Mezzogiorno d'Italia.*

E. — *Travi di calcestruzzo cementizio armate con canne di bambù.*

Un'altra serie di studî sperimentali in parte in corso riguarda una ricerca di interesse autarchico: sulla possibilità di costituire una trave in cemento armato sostituendo al ferro un'armatura con materiale di produzione nazionale.

Furono sperimentate travi di calcestruzzo cementizio, armate con canne di bambù e con staffe costituite con liste ricavate dalle stesse canne sud-

dette. Si sperimentarono dapprima le proprietà elementari del bambù, riscontrando un'elevata resistenza, ed un modulo di elasticità prossimamente uguale a quello del calcestruzzo.

Per ottenere una buona aderenza tra canne e calcestruzzo si riconobbe l'opportunità di mettere in opera le canne spaccate ognuna in due metà secondo un piano di sezione assiale longitudinale: in tal modo si riscontrò che il calcestruzzo, ben pigiato, riempe tutti gli spazî nella parte concava, tra i setti nodali, i quali assicurano come un ingranamento con la massa del calcestruzzo stesso, evitando ogni possibilità di scorrimento tra la massa medesima e l'armatura.

Le travi sperimentali appositamente confezionate, furono sottoposte a flessione fino a rottura, e presentarono una resistenza assai apprezzabile tecnicamente: notevolmente maggiore di quella ricavata dal calcolo statico in base alle proprietà elementari dei materiali costituenti.

Inoltre le travi stesse, sfasciate dopo la prova, rivelarono manifesti indizî di ottima aderenza tra il calcestruzzo e le canne d'armatura.

Altri esperimenti sono in preparazione per investigare le condizioni ottime d'impiego della detta armatura, ed anche per provare travi armate con canne assoggettate a varî processi d'immunizzazione contro l'imputridimento (correntemente in uso per i legnami): si preparano pure travi in varie condizioni, da conservare per prove a scadenza dopo lungo periodo di tempo (6 mesi, un anno e più) per investigare l'eventuale influenza del tempo sulla conservazione o sull'alterazione della canna immersa nella massa cementizia.

I risultati possono avere importanza autarchica, in quanto canne di bambù si trovano sin d'ora correntemente in Calabria ed in Sicilia, nelle Colonie, nell'Impero, ed eventualmente potrebbero in séguito venir coltivate su più larga scala nelle stesse località.

F. — *Taratura del dinamometro a pendolo di una macchina univer. sale da 50 tonn. per prove di materiali: — adattamento della macchina a misure esatte di sforzi anche molto piccoli.*

Infine credo opportuno dare ora qualche notizia su altri esperimenti recentemente da me condotti a termine nel predetto Laboratorio: essi avevano per oggetto il comportamento del dinamometro a pendolo della macchina universale *Amsler* da 50 tonnellate a comando idraulico esistente nel Laboratorio, ed avevano lo scopo di aumentare la sensibilità del dinamometro stesso, in modo che con la detta macchina fosse possibile misurare con grande approssimazione anche sforzi relativamente molto piccoli.

Con mezzi meccanici semplicissimi e di uso rapido e comodo si rese possibile ottenere nella detta poderosa macchina due nuove *scale* per gli sforzi, in modo che ad un intero giro dell'indice del dinamometro corrispondano rispettivamente gli sforzi di 2000 Kg. e di 1000 Kg.

Negli esperimenti istituiti all'uopo, alla spinta che la pressa idraulica trasmette all'equipaggio mobile del dinamometro si sostituì un peso P direttamente applicato, e quindi si determinò sperimentalmente un contrappeso da fissare in data posizione sul pendolo del dinamometro, in modo da ottenere la desiderata scala per gli sforzi, cioè un assegnato coefficiente di proporzionalità tra il peso P e la deviazione da esso impressa all'indice del dinamometro.

Ciò ben inteso per ciascuna delle due *scale* sopra indicate.

Apposite e ripetute prove di controllo hanno dimostrato la grandissima approssimazione che si può realizzare nella misura degli sforzi con le nuove scale: un carico dell'ordine di un centinaio di Kg. direttamente applicato sulla traversa della macchina di prova, può essere *pesato* con una insensibilità di poche decine di grammi.

Il risultato di queste ricerche consentì al suddetto Laboratorio la realizzazione della esatta misura di sforzi relativamente piccoli, utilizzando tutta la completa attrezzatura della già citata macchina universale, e pertanto di evitare la spesa — che altrimenti sarebbe stata necessaria — per l'acquisto di una o due macchine (di produzione straniera) appositamente costruite per la misura dei detti sforzi piccoli

Perciò il risultato stesso costituì un altro modesto contributo all'economia ed all'autarchia.

Le brevi notizie che precedono, per quanto fedeli, e sufficienti a fornire una chiara e completa idea di ognuno degli ordini di ricerche sperimentali trattati, sono necessariamente schematiche e sommarie, data la ristrettezza dello spazio qui disponibile.

Perciò io mi riservo e mi propongo di sviluppare più ampiamente i singoli argomenti in altrettanti lavori più diffusi, che potranno trovare più vasto spazio in riviste o periodici tecnici.

Gli esperimenti di cui al paragrafo *A (ferri Isteg)* furono tempestimente comunicati in apposita relazione al Comitato per l'Ingegneria del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

Sugli argomenti dei paragrafi da *A* ad *E* furono date notizie in una mia Relazione al *Primo Convegno per lo sviluppo della sperimentazione ai fini dell'autarchia industriale* tenuto a Venezia in fine di settembre 1938 - XVI.

Ricerche sulle variazioni della latitudine osservate nella Stazione di Batavia

Memoria del socio ordinario **L. Carnera**

(presentata nell' adunanza del dì 4 maggio 1939 - XVII
per essere inserita nel vol. I, serie 3., degli Atti)

Sunto. — Approfittando delle posizioni e moti propri rigorosi contenuti nel « General Catalog » di L. Boss, di recente pubblicazione, si sono rettificate le latitudini dedotte fin dal 1931 nella Stazione Internazionale di Batavia (Tjilillitan); eliminato poscia l'effetto, che su quella località deve aver prodotto il movimento del Polo, quale risulta dalle Stazioni internazionali dell'emisfero boreale, si è concluso il valore della latitudine media, riferito alla posizione del polo medio assunto nelle disussioni dal Prof. Albrecht fin dal 1905. Indi si è proseguita la discussione delle osservazioni trovando le correzioni residue delle declinazioni medie di ciascun gruppo, e si è messa in luce l'esistenza di una variazione, probabilmente locale, e forse dovuta a fenomeno atmosferico refrazionale, in forza della quale la latitudine nell'intervallo di due ore varia di circa 0″.02; a questa probabilmente se ne aggiunge una seconda variabile periodicamente nel corso dell'anno.

Su alcuni clipeastri miocenici della Calabria

Memoria del socio corrispondente **G Checchia-Rispoli**

(presentata nell' adunanza del dì 7 giugno 1939 - XVII
per essere inserita nel vol. I. serie 3., degli Atti)

Sunto. — Questa memoria deve considerarsi come una appendice alla monografia dei « *Clipeastri miocenici della Calabria* » dello stesso autore, pubblicata nel 1925. In seguito allo studio del materiale raccolto dal prof. O. De Fiore, l'A. ha potuto fare nuove importanti aggiunte a quella ricchissima fauna echinologica: oltre a varie osservazioni su specie già note per la regione, vengono indicate per la prima volta per la formazione miocenica calabrese: *Clyp. mutellensis*, var. *italica*, *Clyp. portentosus*, var. *turriculata* e *Clyp. acuminatus* var. *Reidii*; è nuovo per la scienza *Clyp. Defiorei*. Accompagna il lavoro un elenco completo delle specie di clipeastri finora note in Calabria.

Processo verbale dell'adunanza del dì 3 novembre 1938 - XVII.

Sono presenti il presidente sen. De Lorenzo, i soci ordinari Bakunin, D'Erasmo (segretario), Diamare, Longo, Pascal Ernesto, Pierantoni, Signorini e i soci corrispondenti nazionali Carnera, Colamonico, Gallucci, Nobile e Quercigh.

Il presidente comunica l'immatura morte, avvenuta a Fiuggi il 10 agosto 1938, di S. E. Nicola Parravano, che apparteneva alla nostra Accademia, in qualità di socio corrispondente, dal 21 giugno 1924, e che nel giugno scorso era stato, all'unanimità, designato per la nomina a socio ordinario nella Sezione delle scienze naturali. Ricordatene brevemente le precipue doti di uomo e di scienziato, dà la parola alla socia Bakunin, che ne riassume l'opera multiforme svolta in vantaggio della scienza e dei giovani, informando che una speciale commemorazione dell'estinto sarà tenuta da S. E. Giordani in una prossima adunanza.

Il segretario comunica che, a norma dell'art. 22 dello Statuto, è stato fissato il diario seguente per le adunanze ordinarie dell'anno accademico 1938-39 - XVII: Novembre 3, Dicembre 1, Gennaio 5, Febbraio 2, Marzo 2, Aprile 6, Maggio 4, Giugno 7. Indi presenta le memorie: Cerruti A. « *Ricerche oceanografiche compiute nel Mar Piccolo, nel Mar Grande e nel Golfo di Taranto durante il triennio 1932-34* » (con 1 tav. e 33 fig. interc.); D'Erasmo G. « *Ittioliti cretacei del Brasile* » (con 6 tavole); De Lorenzo G. e D'Erasmo G. « *Avanzi di elefante e di ippopotamo nella valle del Sele* » (con 1 tav. e 14 fig. interc.), inserite nel nuovo volume degli Atti, e segnala, fra le pubblicazioni recentemente pervenute in omaggio, un gruppo di lavori dell'Istituto per le applicazioni del Calcolo offerti dal socio Picone, e il Vocabolario Elettrotecnico in sei lingue inviato dal socio Lombardi, presidente del Comitato Elettrotecnico Italiano.

Il segretario presenta, per l'inserzione nel Rendiconto, una nota del socio Ricci dal titolo: *Ulteriori complementi allo studio statico dei cilindri elastici soggetti a flessione composta.* Presenta, inoltre, a nome del socio Picone che ne propone la stampa nel medesimo periodico, una nota del prof. Tullio Viola *Sulle equazioni algebriche a coefficienti reali le cui radici hanno parti reali esterne o non interne a un determinato intervallo.* L'Accademia unanime approva.

Processo verbale dell'adunanza del dì 1.° dicembre 1938 - XVII.

Assistono all'adunanza, presieduta dal sen. De Lorenzo, i soci ordinari Bakunin, D'Erasmo (segretario), Diamare, Giordani, Longo, Pascal Ernesto, Pierantoni, Signorini ed i soci corrispondenti nazionali Carnera, Carrelli, Colamonico, Gallucci e Nobile.

Il segretario legge il processo verbale dell'adunanza 3 novembre, che è approvato. Indi presenta il volume 1937-38 - XVI del Rendiconto, testè pubblicato.

Il socio S. E. Giordani commemora il socio Nicola Parravano, mettendo in particolare rilievo la molteplice opera di lui, svolta come maestro, come scienziato, come collaboratore con l'industria, come propulsore di tutti gli studi chimici in Italia. Il presidente ringrazia, a nome dei colleghi, per la nobile commemorazione del defunto consocio, ed annunzia che essa verrà inserita, insieme col ritratto, nel Rendiconto accademico.

Il socio Pascal Ernesto presenta una nota del prof. Federico Amodeo dal titolo *Nuovo metodo per la geometria delle serie lineari delle curve algebriche* e ne propone l'accoglimento per la stampa nel Rendiconto. L'Accademia unanime approva.

Il socio Longo offre un suo opuscolo *Ancora sul germoglio di Opuntia sviluppatosi in ambiente umido*, e un altro della prof. R. Parisi sull'*Azione di alcuni fertilizzanti sulla Digitale*, e ne discorre. Il presidente ringrazia.

Processo verbale dell'adunanza del dì 5 gennaio 1939 - XVII.

Presidenza del sen. De Lorenzo. Assistono i soci ordinari Bakunin, D'Erasmo (segretario), Diamare, Longo, Pascal Ernesto, Pierantoni, Scorza, Signorini ed i soci corrispondenti nazionali Carrelli, Colamonico, Nobile, Pascal Mario, Quercigh e Ricci.

Il segretario legge il processo verbale dell'adunanza 1.° dicembre, che è approvato. Indi comunica la circolare relativa al Congresso Internazionale dei Matematici, che avrà luogo a Cambridge, Mass., dal 4 al 12 settembre 1940, e quella riguardante il XVIII Congresso geologico internazionale, fissato a Londra dal 31 luglio al dì 8 agosto 1940. L'Accademia prende atto.

Il socio Scorza presenta una nota della dott. Clelia Guarnaccia *Sulle algebre complesse commutative irriducibili del 4.° ordine dotate di modulo*, e ne propone l'inserzione nel Rendiconto. L'Accademia unanime approva.

Il socio Longo offre in omaggio il volume XIV del Bollettino del R. Orto Botanico di Napoli, e ne parla. Il presidente ringrazia.

Il socio corrispondente Mario Pascal intrattiene l'Accademia sopra alcuni suoi studi in corso e sui risultati finora raggiunti. Il problema delle rotazioni permanenti di un girostato intorno ad un punto fisso era stato iniziato dal Volterra e proseguito dal Lazzarino nel solo caso del moto spontaneo. Considerando un girostato pesante con un punto fisso in cui il moto della parte mobile non è assegnato, si trova che sono dinamicamente possibili rotazioni permanenti del girostato intorno a quattro rette, intersezioni di due dei piani principali d'inerzia relativi al punto fisso con un cono avente il vertice nel punto fisso, qualora una di tali rette sia posta

verticalmente. Risultano allora permanenti tanto la rotazione del girostato quanto quella della parte mobile, di guisa che il moto risulta essere una precessione regolare.

Processo verbale dell'adunanza del dì 2 febbraio 1939 - XVII.

Assistono all'adunanza, presieduta dal sen. De Lorenzo, i soci ordinari Bakunin, Carnera, Colamonico, D'Erasmo (segretario), Longo, Malquori, Pascal Ernesto, Pierantoni, Quercigh, Ricci, Signorini ed i soci corrispondenti nazionali Andreoli, Focaccia, Gleijeses, Ippolito.

Il segretario legge il processo verbale dell'adunanza 5 gennaio, che è approvato.

Il presidente esprime le condoglianze dell'Accademia al segretario per la grave disgrazia familiare recentemente toccatagli. Il segretario ringrazia. Indi comunica la morte, avvenuta il 19 gennaio u. s., del socio ordinario Giuseppe Cesàro, professore emerito di Mineralogia nell'Università di Liegi, appartenente alla Sezione di Scienze naturali dal dì 11 novembre 1916, e quella del collega Carlo Fabrizio Parona, emerito di Geologia nell'Università di Torino e decano fra i corrispondenti della medesima Sezione, a cui apparteneva fin dal dì 11 febbraio 1905. Egli ricorda brevemente le principali benemerenze, sia nel campo scientifico che in quello didattico, dei due compianti consoci, ed annunzia che una commemorazione di essi sarà rispettivamente tenuta, in altra adunanza, dai soci Quercigh e D'Erasmo. Dà, infine, il benvenuto ai nuovi soci presenti all'adunanza.

Fra le pubblicazioni recentemente pervenute in omaggio il segretario segnala la parte III, fascicolo 1.°, della *Termotecnica* del consocio Brunelli. Il presidente, a nome dell'Accademia, ringrazia.

Il segretario legge la Relazione sui lavori accademici dell'anno 1937-38 - XVI, che a norma dello Statuto verrà inserita nel Rendiconto.

Il socio Ricci presenta una nota del dott. Camillo Zocchi dal titolo *Esperimenti di usura per abrasione su « scarpe » di legno per funi portanti di funivie* e ne propone l'inserzione nel Rendiconto. L'Accademia approva.

Lo stesso consocio offre in omaggio due pubblicazioni contenenti i risultati di esperienze eseguite nell'Istituto di Scienza delle costruzioni da lui diretto, e ne parla. Il presidente, a nome dell'Accademia, ringrazia.

Successivamente il socio Ricci dà notizia di una recensione, recentemente comparsa nel Zentralblatt für Mathematik, relativa ad un suo lavoro inserito nel Rendiconto accademico del 1937, e di alcuni studi, attualmente in corso nell'Istituto da lui diretto, che hanno intento ed interesse autarchici: studi relativi a speciali ferri per armature di travi di cemento armato, detti ferri *Isteg*; relativi alle proprietà di calcestruzzi cementizi ottenuti con svariate dosature, usando ghiaia e pietrisco di ferrugine vesu-

viana e di lapillo, con diverse composizioni granulometriche; e relativi alla possibilità di costruire travi in cemento armato, sostituendo al ferro una armatura con altri materiali di produzione nazionale. Dei risultati finora conseguiti in questi ordini di ricerche sperimentali il socio Ricci dà brevi notizie preliminari, che saranno pubblicate nel Rendiconto.

Il socio Quercigh presenta due note del prof. Antonio Parascandola, dal titolo: *Sulle sabbie ferrifere campane* e *L'attività vulcanica nella regione flegrea nei riguardi del suo possibile sfruttamento*, e ne propone l'accoglimento per la stampa nel Rendiconto. L'Accademia approva.

Il socio Pierantoni informa l'Accademia di alcuni studi già compiuti e di altri ancora in corso nell'Istituto di Zoologia da lui diretto, sopra l'azione della luce visibile di bassa intensità e di ben controllata lunghezza d'onda sullo sviluppo di alcuni animali. Da queste ricerche, compiute da lui personalmente sullo sviluppo di *Rana* e di *Stegomyia* e da Terio sullo sviluppo di *Sarcophaga*, è risultato, che le luci artificiali tendono in generale ad accelerare lo sviluppo, ma che particolarmente acceleratrice si è dimostrata quella indaco-violetta (fra 4550 e 4000°A), mentre assai sfavorevolmente agisce la luce azzurra (5050-4550) particolarmente per *Rana*, mentre la rossa è sfavorevole per *Sarcophaga* e la verde per *Stegomyia*. In complesso, le luci più sfavorevoli allo sviluppo sono rifuggite dagli animali adulti, come è già noto per la luce azzurra da parte delle mosche, e come appare sperimentalmente per quella verde da parte della *Stegomyia*. Questi primi risultati appaiono già molto interessanti; ed il fatto che alcune specie accelerano il loro sviluppo fino a ridurne il periodo alla metà *(Sarcophaga)* lascia intravedere la possibilità di pratiche applicazioni, se potrà dimostrarsi che gli stessi risultati si ottengono sperimentando con insetti industriali, specialmente considerando il basso costo di queste luci colorate, che l'A. ottiene mediante filtri di facile fabbricazione.

Processo verbale dell'adunanza del dì 2 marzo 1939 - XVII.

Presidenza del sen. De Lorenzo. Presenti i soci ordinari Bakunin, Carnera, Colamonico, D'Erasmo (segretario), Diamare, Longo, Malquori, Pascal Ernesto, Pierantoni, Quercigh, Ricci, Signorini, ed i soci corrispondenti nazionali Gallucci e Nobile.

Il segretario legge il processo verbale dell'adunanza 2 febbraio, che è approvato. Indi presenta la memoria E. Guerrieri, *Catalogo di 166 stelle a forte moto proprio*, inserita negli Atti accademici e di cui è stata recentemente ultimata la stampa.

Fra le pubblicazioni recentemente pervenute in omaggio è segnalato un gruppo di lavori inviati dall'Istituto G. Ferraris di Torino.

Il segretario presenta, a nome del socio Picone che ne propone l'inser-

zione nel Rendiconto, una nota del dott. Savino Coronato dal titolo: *Teoremi di confronto per equazioni differenziali lineari del secondo ordine.* L'Accademia approva.

Il socio Ricci presenta, per lo stesso periodico, una nota del dott. Franco Jossa: *Torsione e taglio negli archi piani a grande curvatura*, e ne discorre, proponendone l'accoglimento per la stampa. L'Accademia approva.

Processo verbale dell'adunanza del dì 6 aprile 1939 - XVII.

Assistono all'adunanza, presieduta dal sen. De Lorenzo, i soci ordinari Bakunin, Bottazzi, Carrelli, Colamonico, D'Erasmo (segretario), Diamare, Longo, Malquori, Pascal Ernesto, Pierantoni, Ricci, Signorini, ed i soci corrispondenti nazionali Gallucci e Pascal Mario.

Il segretario legge il processo verbale della tornata 2 marzo, che è approvato. Indi segnala, fra le pubblicazioni recentemente pervenute in omaggio, un lavoro del socio De Lorenzo dal titolo: *Geologia e geografia fisica di Leonardo da Vinci*, e un gruppo di note eseguite nell'Istituto per le applicazioni del calcolo in Roma, inviato dal consocio Picone. L'Accademia ringrazia i donatori.

Il socio Malquori presenta, per il Rendiconto, un lavoro suo e dell'ing. Giannone dal titolo: *L'esame delle materie prime da destinarsi alla produzione di refrattari silicei.*

Lo stesso socio presenta una nota dell'ing. Giannone *Sulla magnesite dell'isola d'Elba*, e ne discorre, proponendone l'inserzione nel Rendiconto. L'Accademia unanime approva.

Processo verbale dell'adunanza del dì 4 maggio 1939 - XVII.

Presidenza del sen. De Lorenzo. Sono presenti i soci ordinari Bakunin, Carnera, Carrelli, Colamonico, D'Erasmo (segretario), Diamare, Longo, Malquori, Pascal Ernesto, Pierantoni, Ricci, Signorini ed i soci corrispondenti nazionali Andreoli, Focaccia, Nobile e Gallucci.

Il segretario legge il processo verbale dell'adunanza 6 aprile, che è approvato. Indi il presidente comunica, con profondo dolore, l'immatura scomparsa del consocio Emanuele Quercigh, avvenuta in Napoli il 21 aprile, e ne ricorda le principali benemerenze di cittadino, scienziato e maestro, dando poscia la parola al socio D'Erasmo, il quale legge una commossa commemorazione del compianto Collega, che verrà inserita nel Rendiconto, insieme col ritratto e con l'elenco delle pubblicazioni.

Il socio Pascal Ernesto, quale decano della sezione di Scienze Matematiche, sente il bisogno di associarsi con tutto l'animo al cordoglio per la

perdita dell'amato Collega. « Questo avvenimento », egli dice, « mi ha fatto una grande impressione, e ne ho pianto; avevamo visto Quercigh pochi giorni avanti in questa stessa aula, forte e vigoroso, esporci i risultati di nuove ricerche sue e di altri e poi abbiamo saputo che Egli era sparito e che non lo rivedremo mai più. Dio mio! com'è triste la vita, quando nel grigio tramonto vediamo ad uno ad uno sparire tutti quelli che ci furono cari, tutti quelli che amammo e che ci lasciano desolatamente soli! ».

Il segretario presenta, a nome del socio Scorza che ne propone l'inserzione nel Rendiconto, la nota del prof. Mario Giovanardi *Sulla prospettiva (conica e cilindrica) delle superfici di rotazione.* L'Accademia unanime approva.

Il socio Carrelli presenta una nota del prof. Giuseppe Imbò dal titolo: *Deviazioni apparenti della verticale all'Osservatorio Vesuviano,* e ne discorre, proponendo l'accoglimento di essa nel Rendiconto. L'Accademia approva.

Il socio Carnera presenta, per il medesimo periodico, una nota sua e del dott. P. Vocca sopra *Il movimento del polo durante il 1938 dalle osservazioni delle stazioni internazionali.* Presenta, inoltre, per la pubblicazione nel volume degli Atti, una sua memoria dal titolo *Ricerche sulla latitudine di Batavia,* e ne parla brevemente. L'Accademia approva, accogliendo la proposta dell'Autore che ha dichiarato di provvedere a proprie spese alla esecuzione delle relative illustrazioni.

Il socio Andreoli presenta una nota del prof. Luigi Lordi *A proposito della decomposizione del premio nell'assicurazione vita,* e ne propone la inserzione nel Rendiconto. L'Accademia approva all'unanimità.

Il socio Longo offre in omaggio la *Relazione per l'anno 1938 sulla Stazione sperimentale per le piante officinali annessa al R. Orto Botanico di Napoli,* e ne discorre. Il presidente, a nome dell'Accademia, ringrazia.

Processo verbale dell'adunanza del dì 7 giugno 1939 - XVII.

All'adunanza, che è presieduta dal sen. De Lorenzo, partecipano i soci ordinari Bakunin, Carnera, Carrelli, Colamonico, D'Erasmo (segretario), Diamare, Malquori, Pascal Ernesto, Pierantoni, Ricci, ed i corrispondenti nazionali Andreoli, De Dominicis, Gallucci, Nobile e Pascal Mario.

Il segretario legge il processo verbale dell'adunanza 4 maggio, che è approvato.

Il socio Carrelli presenta, per l'inserzione nel Rendiconto, una sua nota *Sulle proprietà ottiche dei metalli.*

Lo stesso socio presenta, per il medesimo periodico, una nota del dott. Francesco Cennamo dal titolo: *Variazioni del potere riflettente del nichelio colla temperatura.* L'Accademia unanime approva.

Il socio D'Erasmo legge la commemorazione del prof. Carlo Fabrizio Parona, che verrà inserita nel Rendiconto insieme col ritratto e con l'elenco delle pubblicazioni.

Il segretario presenta, a nome del socio corrispondente Giuseppe Checchia-Rispoli, una memoria *Su alcuni clipeastri miocenici della Calabria*. L'Accademia unanime ne accoglie l'inserzione nel volume degli Atti, insieme con le figure intercalate e le tre tavole che l'accompagnano.

Il socio corrispondente Andreoli presenta, per il Rendiconto, una sua nota *Sulla convergenza delle serie (assoluta, incondizionata, totale)*, ed una seconda nota dal titolo: *Variabili mutuamente casuali e «sfioccamento» statistico.*

Il socio Carnera parla dei principali risultati della riunione recentemente tenuta a Roma dalla R. Commissione geodetica italiana e specialmente del voto per la istituzione, nelle Università italiane, di una speciale laurea in Scienze astronomiche e geofisiche.

Il socio Ricci legge la commemorazione del socio Udalrigo Masoni, che sarà stampata nel Rendiconto accademico, insieme col ritratto e con l'elenco bibliografico.

Opere ed Opuscoli ricevuti in dono dagli autori o editori dal 29 ottobre 1938 al 28 ottobre 1939.

L' inserzione nel presente elenco valga come ringraziamento ai donatori.

1. Alwen M. E., Mosquitoes of the Ethiopian Region — II. Anophelini adults and early stages. — Londra, 1938.
2. Ansaloni S. e Giardino E., Prove su tubi « Starto ». Resistenze per avviamento automatico. — Torino, 1938.
3. Baars A., Onderzoek naar de mogelijkheid tot beinvloeding der conjunctuurbeweging door kapitaaluitgaven der overheid en door andere overheidsmaatregelen. — Haarlem, 1937.
4. Bergler H., Geologische Untersuchungen an der Keuper-Lias-Greuoe im Gebiete zwischen Weissenburg i. B. und Ullersberg. — Erlangen, 1937.
5. Bergmans J., Lichtreflectie door Wegdekken. — Delft, 1938.
6. Boaga G., Misure di gravità relativa compiute nel 1937 in Sardegna. — Padova, 1939.
7. Boella M., Circuiti equivalenti dei tubi elettronici. — Livorno, 1937.
8. » » Tubi elettronici nella generazione di oscillazioni. — Livorno, 1937.
9. Bressi A., Misure sistematiche di resistenze elevate ad alta frequenza. — Torino, 1938.
10. Brunelli P. E., Termotecnica (Parte terza — Impianti). — Torino, 1939.
11. Carnera L. e Vocca P., Il movimento del Polo durante il 1938 dalle osservazioni delle stazioni internazionali. — Napoli, 1939.
12. Carnera L., Le variazioni della latitudine durante il 1937. Risultati provvisori dedotti dalle osservazioni delle stazioni internazionali. — Napoli, 1938.
13. » » Le variazioni di latitudine nelle osservazioni del 1871 del prof. E. Fergola. — Napoli, 1938.
14. » » Ricerche sulle variazioni della latitudine osservate nella stazione di Batavia (Tjililitan). — Napoli, 1939.
15. » » Risultati tratti dallo studio delle variazioni di latitudine negli anni 1936 e 1937. — Roma, 1938.
16. Carrara U., Effetto termoionico. — Livorno, 1937.
17. Carrara N., Resistenze differenziali negative e oscillatori di rilasciamento. — Livorno, 1938.
18. Casasopra S., La presenza della tapiolite nelle pegmatiti di Cresciano (Riviera), Ticino. — Zurigo, 1938.

19. Cesari L., Proprietà delle funzioni rappresentate mediante serie trigonometriche. — Roma, 1938.
20. » » Sulla biregolarità delle funzioni armoniche in domini rettangolari. — Roma, 1938.
21. » » Sull'analiticità delle funzioni rappresentate mediante serie trigonometriche. — Roma, 1938.
22. » » Sulle serie di Fourier delle funzioni lipschitziane di più variabili. — Roma, 1938.
23. » » Sul problema della stabilità. — Roma, 1939.
24. » » Una relazione quantitativa fra gli zeri delle trascendenti intere semplici e quelli della loro derivata. — Roma, 1938.
25. Cimmino G., Calcolo approssimato per le soluzioni dei sistemi di equazioni lineari. — Roma, 1938.
26. » » Considerazioni sul calcolo degli amplificatori di potenza a radiofrequenza. — Torino, 1939.
27. Cosijn A. J., Statistical studies on the phylogeny of some foraminifera. — Leiden, 1938.
28. Deaglio R., Laboratori europei di fotometria. — Torino, 1938.
29. » » Reetifying Properties of Crystals. — Torino, 1938.
30. » » Sorgenti di luce. — Torino, 1938.
31. Degens P. N. Jr., De langzame verbranding van methaan. — Delft, 1937.
32. De Lorenzo G., Geologia e Geografia Fisica di Leonardo da Vinci. — Roma, 1939.
33. De Quant J. C., De verbrandingswarmte van eenige diolen en hun acetonverbindingen. — Delft, 1938.
34. Fano E., Apparecchiatura per tarature di microfoni elettrostatici. — Torino, 1938.
35. Ferrari-Torniolo A., Amplificatore-rivelatore a indicazione luminosa per ponti. — Torino, 1938.
36. » » Curve universali di risonanza per circuiti affetti da perdite e risonanti in parallelo. — Torino, 1938.
37. » » Strumenti musicali elettrici. — Torino, 1938.
38. » » Sulle così dette « perdite di riflessione » in una trasmissione telefonica e sulle condizioni di massima potenza apparente trasmessa. — Torino, 1938.
39. » » Teoria del ricevitore telefonico. — Torino, 1938.
40. Ferrero M., Previsioni di occultazioni lunari per l'anno 1939. — Torre Pellice, 1938.
41. Fondazione Politecnica per il Mezzogiorno d'Italia, Relazione sull'attività della Commissione per lo studio dei materiali da costruzione dell'Italia meridionale. — Napoli, 1939.
42. Fubini-Ghiron E., Acustica non lineare delle onde di ampiezza finita. — Torino, 1938.
43. » » Considerazioni sulla sincronizzazione degli oscillatori. — Torino, 1938.

44. Fubini Ghiron E., I. La tension de radiation acoustique et les ondes de grande amplitude. II. Il IX Ciclo di tarature dell'A. E. I. III. Filtro elettromeccanico a frequenza variabile. — Torino, 1937 e 1938.
45. Fubini-Ghiron E. e Pontecorvo P., Miglioramenti nella esecuzione delle misure di frequenza. — Torino, 1938.
46. Furnée J. M., Wisselwerking tusschen boorzuur en de pentolen. — Delft, 1938.
47. Gatti R., La trazione all'Esposizione Internazionale di Parigi e il contributo italiano. — Torino, 1938.
48. Gigli A., Acustica architettonica ed elettrotecnica. — Torino, 1939.
49. » » Lo studio acustico delle sale mediante modelli. La caratteristica di riverberazione delle sale e le proprietà dei rivestimenti assorbenti. — Torino, 1939.
50. Gonsalves V. E., Metingen aangaande de relatieve energieverdeeling van het continue waterstofspectrum Tusschen 2000 en 3000 AE. — 'S. Gravenhage, 1937.
51. Guerrieri E., Catalogo di 166 stelle a forte moto proprio da osservazioni meridiane al cerchio di Repsold. — Napoli, 1939.
52. » » La grande aurora boreale del 25-26 gennaio 1938 - XVI. Connessione tra Aurore polari, macchie solari e perturbazioni elettromagnetiche. — Napoli, 1938.
53. » » La persistente ondata del freddo a Napoli nell'inverno 1937-38. — Napoli, 1938.
54. Heiju F. A., Radioactivity induced by neutrons. — Delft, 1938.
55. Holzener G., Comportamento dei condensatori variabili in aria a radiofrequenza e metodi per le misure su di essi. — Torino, 1938.
56. Ivaldi G., La condanna di Galileo ed il trionfo di Einstein. — Roma, 1938.
57. Krall G., Problemi non stazionari dell'idrodinamica. — Roma, 1938.
58. Leendertse J. J., Polymerisatie van onverzadigde koolwaterstoffen. — Delft, 1938.
59. Lombardi P., L'Istituto Elettrotecnico Nazionale Galileo Ferraris. — Torino, 1938.
60. Longo B., Ancora sul germoglio di Opuntia sviluppatasi in ambiente umido. — Napoli, 1938.
61. » » Relazione per l'anno 1938 sulla Stazione sperimentale per le Piante officinali annessa al R. Orto Botanico di Napoli. — Napoli, 1939.
62. Madella G. B., Rilievi della nota di accordo di orchestre. — Torino, 1939.
63. Malatesta S., Il telescopio elettronico. — Livorno, 1937.
64. » » Prove con sistemi ottici elettronici magnetici. — Livorno, 1938.
65. Marani C., Carducci visto da un rurale. — Torino, 1939.
66. Marshall J. F., The British Mosquitoes. — London, 1938.
67. Matteini C., I tubi elettronici nelle radiocomunicazioni. — Livorno, 1937.
68. Mazure J. P., De berekening van getijden en stormvloeden op benedenrivieren. — Haag, 1937.

69. Mendel C., La specificazione del colore. Il triangolo di colore della C. I. E. — Torino, 1938.
70. Mulders E. M. J., Het systeem broom-water. — Delft, 1938.
71. Muller J. A. W., Enkele bedrijfseconomische beschouwingen over den nederlandschen steenkolenmijnbonw. — Delft, 1938.
72. Negri G., Pier Antonio Micheli. Botanico, in Colombaria « l'Avido ». — Firenze, 1938.
73. Paolini E., Ammettenza di entrata dei tubi elettronici alle altissime frequenze. — Livorno, 1937.
74. » » Misure di tensioni di alta frequenza prodotte da macchine con collettore. — Livorno, 1938.
75. Parisi R., Azione di alcuni fertilizzanti sulla Digitale (Digitalis purpurea L.), nota II. — Napoli, 1938.
76. Passerini G., Le sistemazioni idraulico-agrarie dei terreni e l'autarchia. — Torino, 1939.
77. Penta e Del Vecchio, Lave vesuviane dei principali centri estrattivi. — Napoli, 1936.
78. Perquin L. H. C., Bijdrage tot de kennis der oxydatieve dissimilatie van aspergillus niger van tieghem. — Delft, 1938.
79. Pestarini G. M., Autarchia e trazione ferroviaria. — Torino, 1938.
80. Picone M., Nuove formole di maggiorazione per gl'integrali delle equazioni lineari a derivate parziali del second'ordine ellittico-paraboliche. — Roma, 1939.
81. » » Nuove determinazioni per gl'integrali delle equazioni lineari a derivate parziali. — Roma, 1939.
82. Poledrelli C., Considerazioni sul dimensionamento ottimo di linee bifilari ad alta frequenza. — Torino, 1938.
83. Pontecorvo P., L'influenza della capacità distribuita sul comportamento dei resistori alle alte frequenze. On the Behaviour of Resistor at High Frequencies. — Torino, 1938.
84. » » Piezooscillatori di elevata stabilità di frequenza ottenuti con l'uso contemporaneo di reazione positiva e negativa. — Torino, 1938.
85. R. Commissione Geodetica Italiana, Verbale delle sedute della R. Commissione Geod. It. tenute a Napoli il 30 e 31 maggio 1938. — Padova, 1939.
86. Ricci C. L., Contributi all'autarchia. L'impiego del bambù negli ultimi esperimenti all'Università di Napoli. — Roma, 1939.
87. Rupprecht O., Neuere studien über Arzneimittelanalyse. — Erlangen, 1938.
88. Ruttink J., Chemische en pharmakologische onderzoekingen in de purinereeks, in het bijzonder van aethylxanthinen. — Delft, 1938.
89. Salvadori M., Metodo generale di calcolo delle piastre circolari libere al bordo su appoggi puntuali. — Roma, 1938.
90. Schmitz K., Die agrarischen Wirtschaftsformen und ackerbaumethoden im französischen Mandatsgebiet Kamerun. — Erlangen, 1938.

91. Semenza M., La trazione elettrica e l'autarchia. — Torino, 1938.
92. Siber R., Über die aminometrische Bestimmung pharmezeusch wichtiger Alkaloide in offizinellen Drogen. — Erlangen, 1938.
93. Stadelmann L., Die Zersetzlichkeit pharmazeutischwichtiger Alkaloide unter dem Einfluss von Licht — , Luft und Wärme. — Erlangen, 1938.
94. Stefani V., Sull'integrazione di taluni problemi al contorno relativi al Δw e al $\Delta\Delta w$. — Roma, 1939.
95. Tolotti C., Sull'equilibrio delle piastre elastiche anulari libere. — Roma, 1938.
96. » » Sull'equilibrio elastico di un cilindro cavo soggetto a sforzi piani. — Roma, 1938.
97. Toniolo S. B., Contributo allo studio della macchina sincrona. — Torino, 1939.
98. Torelli S., Contributo al rilievo elettrico degli echi. — Torino, 1939.
99 Tiberio U., Diodi — Triodi — Poliodi. — Livorno, 1937.
100. Vallauri G., Attività dell'I. E. N. G. F. nel suo quarto anno di vita (1937-38 - XVI). — Torino, 1939.
101. » » Guglielmo Marconi. — Torino, 1937.
102. » » Sul problema dei ricercatori. — Torino, 1938.
103. van der Schalk F. J. C., De wiskundig-statistische analyse van de arbeids-productiviteit en haar practische toepassing op eenige bedrijfstakken en ondernemingen in Nederland. (parti I, II e III). — Haarlem, 1938.
104. van der Spek, Cyclische acetalen van pyrocatechol. — Delft, 1938.
105. van Lammeren W. P. A., Analyse der voortstuwingscomponenten in verband met het schoaleffect bij scheepsododelproeven. — Wageningen, 1938.
106. van Schouvenburg K. L., On respiration and light emission in luminous bacteria. — Delft, 1938.
107. Viaro M., Ascensioni rette medie per il 1935.0 di 200 stelle della lista « Zusatzsterne des Dritten Fundamentalkatalogs ». — Pavia, 1938.
108. » » Orbita definitiva della Cometa 1910 IV (Metcalf). — Roma, 1938.
109. Viti E., Limiti di applicabilità del Dinatron come mezzo di misura a frequenze elevate. — Torino, 1938.
110. « » Relè elettronico a doppio scatto. — Torino, 1938.
111. Vocca P., L'equilibrio del Sistema solare e una sua nuova costante dimensionale. Nota preliminare. — Napoli, 1938.
112. Vogel R., Über die Konstitution des Aluminium-azetates in der essigsauren Tonerdelösung des Deutschen Arzneibuches. — Erlangen, 1938.
113. Weigel K., Grundwasseruntersuchungen im Schwabachtal bei Erlangen. — Erlangen, 1938.

INDICE

G. D' Erasmo — Relazione sui lavori compiuti dalla R. Accademia di Scienze fisiche e matematiche durante l'anno 1937-38 (XVI) . . . . . Pag. 3

C. L. Ricci — Ulteriori complementi allo studio statico dei cilindri elastici soggetti a flessione composta . . . . . » 9

T. Viola — Sulle equazioni algebriche a coefficienti reali, le cui radici hanno parti reali esterne o non interne a un determinato intervallo . . . » 15

F. Amodeo — Nuovo metodo per la Geometria delle serie lineari delle curve algebriche » 21

C. Guarnaccia — Sulle algebre complesse commutative irriducibili del 4. ordine dotate di modulo . . . . . » 45

C Zocchi — Esperimenti di usura per abrasione su «scarpe» di legno per funi portanti di funivie . . . . . » 55

F. Jossa — Torsione e taglio negli archi piani a grande curvatura. . . . » 63

S. Coronato — Teoremi di confronto per equazioni differenziali lineari del 2. ordine » 75

G. Malquori e A. Giannone — L' esame delle materie prime da destinarsi alla produzione di refrattari silicei . . . . . » 83

A. Giannone — Sulla magnesite dell' isola d' Elba . . . . . » 88

L. Lordi — Sulla decomposizione del premio nell' assicurazione vita . . . » 92

M. Giovanardi — Sulla prospettiva (conica e cilindrica) delle superficie di rotazione » 99

G. D' Erasmo — Commemorazione del socio ordinario Emanuele Quercigh . . » 108

L. Carnera e P. Vocca — Il movimento del Polo durante il 1938 dalle osservazioni delle Stazioni Internazionali . . . . . » 117

G. D' Erasmo — Commemorazione del socio corrispondente Carlo Fabrizio Parona » 130

A. Carelli — Sulle proprietà ottiche dei metalli . . . . . » 148

F. Cennamo — Variazioni del potere assorbente del Ni. con la temperatura . . » 155

B. Focaccia e M. M. Jacopetti — La misura delle correnti disperse . . . » 162

G. Andreoli — Sulla convergenza delle serie ed i suoi caratteri gruppali (convergenza assoluta, incondizionata, totale) . . . . . » 172

C. L. Ricci — Commemorazione del socio ordinario Udalrigo Masoni . . . » 177

A. Parascandola — Sulle sabbie ferrifere campane . . . . . » 197

A. Parascandola — L' attività vulcanica nella regione flegrea nei riguardi del suo possibile sfruttamento . . . . . » 197

G. Andreoli — Variabili mutuamente casuali e «sfioccamento» statistico . . » 198

F. Giordani — Commemorazione del socio Nicola Parravano. . . . . » 206

G. Imbò — Deviazioni apparenti della verticale all' Osservatorio Vesuviano . . » 206

C. L. Ricci — Notizie di alcuni gruppi di esperimenti di carattere autarchico su materiali da costruzione, e su macchine di prova . . . . . » 207

L. Carnera — Ricerche sulle variazioni della latitudine osservate nella Stazione di Batavia *(Sunto della memoria inserita nel vol. I, serie 3., degli Atti)* » 213

G. Checchia-Rispoli — Su alcuni clipeastri miocenici della Calabria *(Sunto della memoria inserita nel vol. I, serie 3., degli Atti)* . . . . . » 213

Processi verbali delle adunanze del 3 novembre, 1 dicembre 1938, 5 gennaio, 2 febbraio, 2 marzo, 6 aprile, 4 maggio e 7 giugno 1939 (XVII) . . » 214

Opere ed opuscoli ricevuti in dono dagli autori o dagli editori dal 29 ottobre 1938 al 28 ottobre 1939 (XVII) . . . . . » 221

Indice del volume . . . . . » 226

Redattore responsabile ai termini di legge: prof. U. PIERANTONI